LAS SUPERFICES COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

Como hemos dicho en la página 2 del presente capítulo, los planos, la superficie esférica, los cilindros y los conos pueden tratarse con relativa facilidad en el espacio tridimensional, definiéndolos como lugares geométricos**.**

La Superficie esférica:

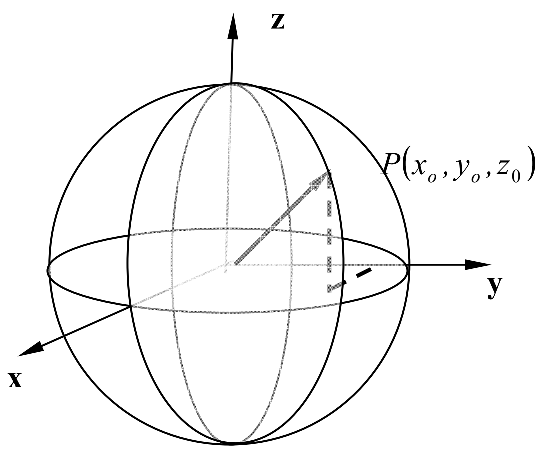
Decimos que **la superficie esférica es el conjunto de los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo llamado centro.**

Análogamente a lo que hicimos al tratar la circunferencia, dibujamos el lugar geométrico y, por aplicación del teorema de Pitágoras para el espacio tridimensional, obtenemos la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

que corresponde al caso particular de una superficie esférica con centro en el origen del sistema de coordenadas y radio r.

Actividad: definida la superficie esférica como lugar geométrico, encontrar su ecuación en el caso de centro desplazado del origen de coordenadas..



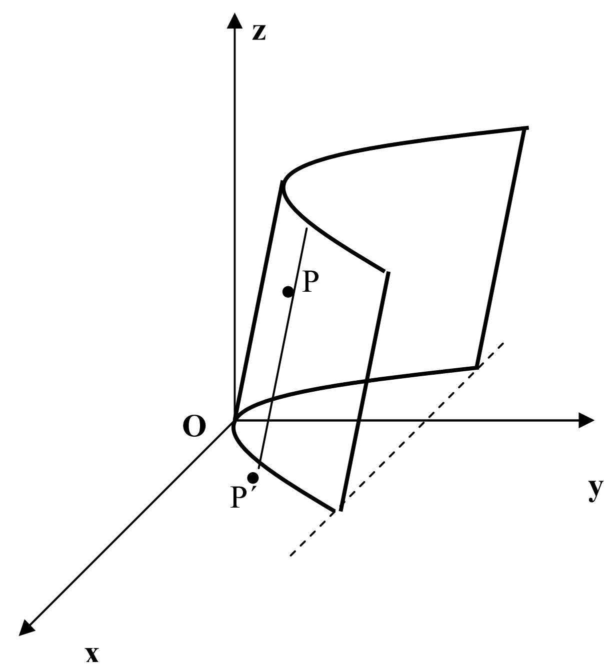
Superficies cilíndricas

Son las generadas por una recta que se mueve manteniéndose paralela a una dirección dada y pasa siempre por un punto de una curva plana.

La recta móvil recibe el nombre de **generatriz** y la curva fija se denomina **directriz** de la superficie cilíndrica.

Para nuestro estudio particular consideraremos que la directriz es una curva ubicada sobre una de los planos coordenados.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola. $x^2 = 4y$; $z = 0$ y cuya generatriz tiene como vector director $\overrightarrow{OP} = \vec{d} = (2,2,4)$



Supongamos que cuando la generatriz pasa por P (x,y,z) corta a la directriz en P´(x´,y´o); las ecuaciones de la recta son: $\frac{x-x'}{2} = \frac{y-y'}{2} = \frac{z}{4}$

Como P´está sobre la parábola, resulta que sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, es decir: $x'^2 = 4y'; z' = 0$

Despejando x´; y´ de las ecuaciones de la recta

$$2(x-x')=z \Rightarrow 2x-2x'=z \Rightarrow x'=x-\frac{z}{2}$$

$$2(y-y')=z \Rightarrow 2y-2y'=z \Rightarrow y'=y-\frac{z}{2}$$

introduciendo los valores hallados en la primera de las ecuaciones de la parábola.

$$(x-\frac{z}{2})^2=4(y-\frac{z}{2})$$

$$x^2-xz+\frac{z^2}{4}=4y-2z$$

$x^2+\frac{z^2}{4}-xz-4y+2z=0$ es la ecuación de la superficie buscada.

Acabamos de ver como se determina la ecuación de una superficie cilíndrica conociendo las ecuaciones de su directriz y un vector director de su recta generatriz.

El problema inverso consiste en encontrar las ecuaciones de la directriz y un vector director de la recta generatriz a partir de la ecuación de una superficie cilíndrica.

Para ello seguimos el siguiente **ejemplo**:

Demostrar que la ecuación $x^2+y^2+2z^2+2xz-2yz=1$ corresponde a una superficie cilíndrica y hallar las ecuaciones de su directriz y un vector director de su recta generatriz.

Las secciones de la superficie $x^2+y^2+2z^2+2xz-2yz=1$ con z= k son las curvas de ecuaciones. $x^2+y^2+2k^2+2kx-2ky=1\ ;\ z=k$, o bien

$$(x+k)^2+(y-k)^2=1\ ;\ z=k$$

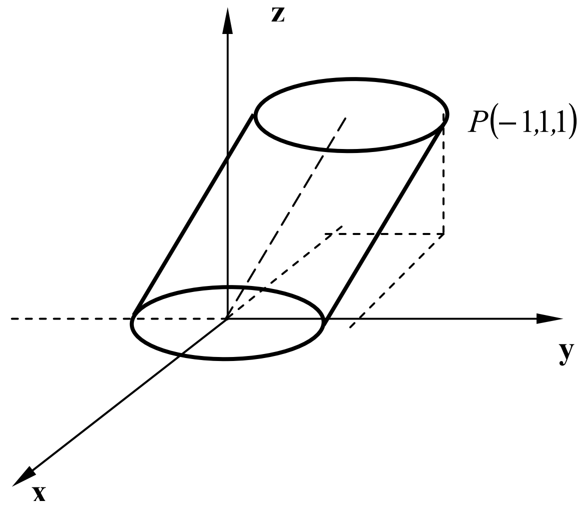
Las ecuaciones precedentes son las expresiones analíticas de las circunferencias de radio igual a 1, cualquiera sea k, ubicadas sobre planos paralelos al plano xy.

En particular para k=0 obtenemos la circunferencia de ecuaciones

$$x^2+y^2=1\ ;\ z=0$$

En consecuencia, la superficie estudiada es un cilindro circular de directriz $x^2 + y^2 = 1 \;;\; z = 0$

La recta que une el centro (-k,k,k) de cualquier circunferencia y el centro (0,0,0) de la directriz es paralela a la generatriz; un vector director de esta recta es (-1,1,1) y entonces, estas son las componentes de un vector director de la generatriz.



En el caso particular en que la generatriz de un cilindro sea perpendicular al plano de la directriz, diremos que se trata de un **cilindro recto**.

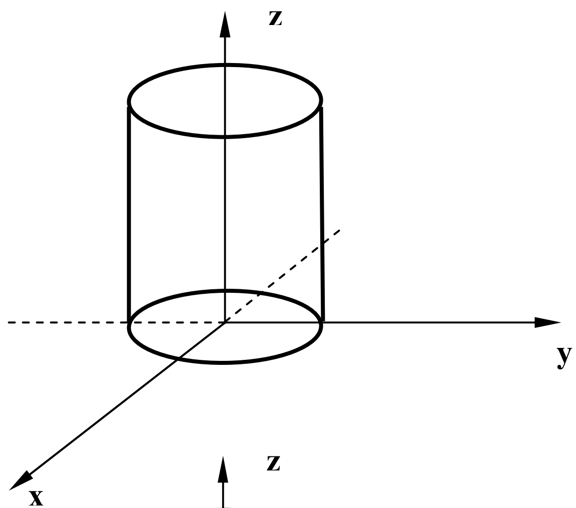
Como veremos más adelante los cilindros rectos resultan de gran utilidad en el estudio de la forma de cualquier superficie cuádrica ya que permiten interpretar la misma cuando se conoce su ecuación.

Al igual de lo que sucede con los planos paralelos a un plano coordenado resulta sencillo admitir que la <u>ecuación de una superficie cilíndrica recta</u>, cuya recta generatriz es perpendicular al plano de su directriz, carece de término en la variable que corresponde a la dirección de la generatriz; es decir que, si la generatriz es paralela al eje z (para el caso de directriz circular), el cilindro tiene analíticamente el aspecto

$$x^2 + y^2 = k \;;\; z = k_0 \;;\; con\ k\ y\ k_0\ constantes,\ no\ necesariamente\ iguales$$

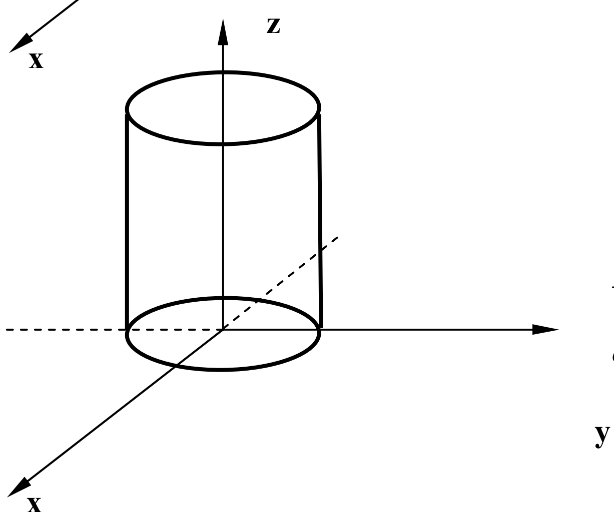
Por ejemplo; la ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$ en E^3 corresponde a un cilindro de directriz elíptica y generatriz paralela al eje z.

Además de los cilindros de directriz oblicua se presentan los siguientes casos de cilindros rectos::



$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

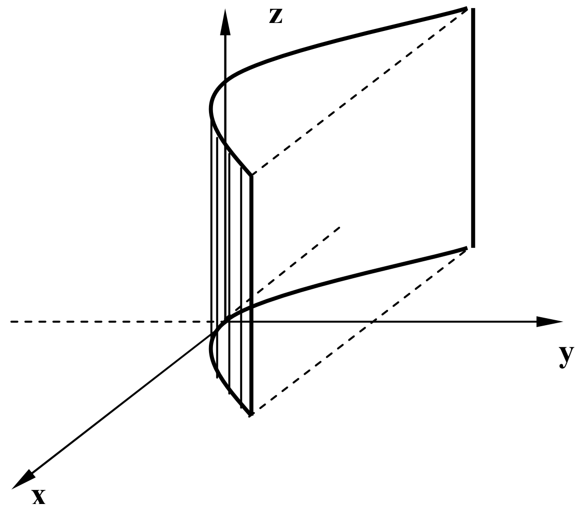
cilindro circular recto



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

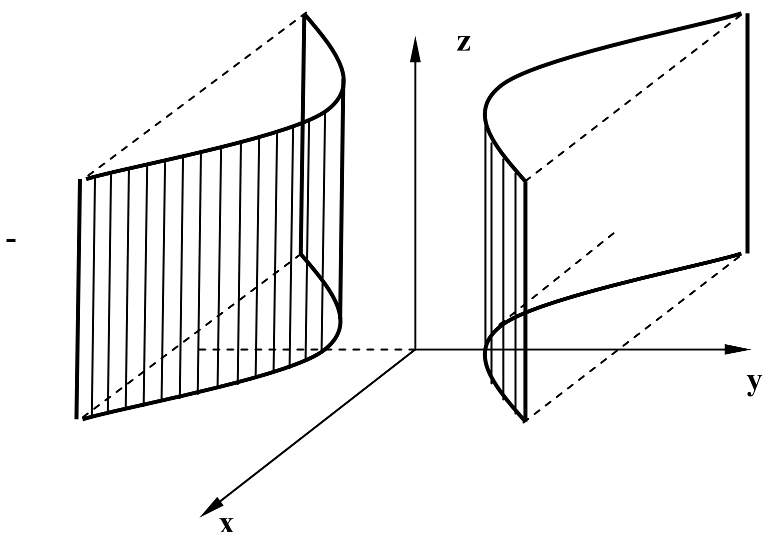
cilindro elíptico recto

<u>Nota:</u> los cilindros de directriz circular y elíptica, tienen el mismo aspecto visual en razón de la perspectiva necesaria para representar en el plano figuras del espacio tridimensional.



$$x^2 = 2py$$

cilindro parabólico recto



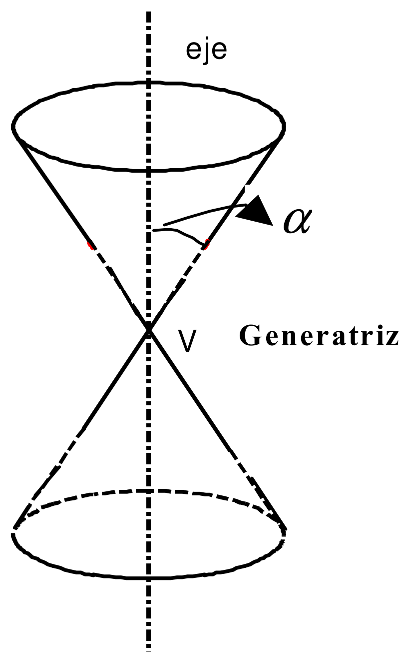
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

cilindro hiperbólico recto

Superficies cónicas:

Se llama superficie cónica o simplemente **cono** a la generada por una recta **(generatriz)** que se mueve pasando siempre por una curva plana fija llamada **directriz** y por un punto fijo que recibe el nombre de **vértice**, no contenido en el plano de la directriz.

El vértice divide al cono en dos partes que reciben el nombre de ramas, hojas o napas.



Conocidas las ecuaciones de la curva directriz y las coordenadas del vértice puede obtenerse la ecuación de la superficie.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse: $4x^2 + z^2 = 1\ ;\ y = 4$ estando el vértice en el punto V(1,1,3).

Suponemos que la generatriz que pasa por el punto P(x,y,z) de la superficie corta a la directriz en el punto P´(x´,y´,z´) siendo las ecuacionnes de esta generatriz:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-3}{z'-3}$$

Como P´ está sobre la elipse directriz, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la misma, es decir: . $4x'^2 + z'^2 = 1\ ;\ y' = 4$.

Podemos eliminar x´, y´, z´ de la siguiente forma

a) sustituimos y´= 4 en las ecuaciones de la generatriz $\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-3}{z'-3}$

b) despejamos x´ en función de x e y $\frac{3(x-1)}{y-1} = x'-1$

$$\frac{3x-3+y-1}{y-1} = x' = \frac{3x+y-4}{y-1}$$

c) despejamos z´ en función de y, z

$$z'-3 = \frac{3(z-3)}{y-1}$$

$$z' = \frac{3z-9+3(y-1)}{y-1} = \frac{3z+3y-12}{y-1}$$

d) reemplazando los valores obtenidos en $4x'^2 + z'^2 = 1$

$$4\left(\frac{3x+y-4}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{3z+3y-12}{y-1}\right)^2 = 1$$

$$4\left(\frac{3x-3}{y-1} + \frac{y-1}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{3z-9}{y-1} + \frac{3y-3}{y-1}\right)^2 = 1$$

$$4[(3x-3)+(y-1)]^2 + [(3z-9)+(3y-3)]^2 = (y-1)^2$$

$$4\left[(3x-3)^2 + 2(3x-3)(y-1) + (y-1)^2\right] + \left[(3z-9)^2 + 2(3z-9)(3y-3) + (3y-3)^2\right] = y^2 - 2y + 1$$

$$4\left[9x^2-18x+9+(6x-6)(y-1)+y^2-2y+1\right]+\left[9z^2-54z+81+(6z-18)(3y-3)+9y^2-18y+9\right]=$$
$$=y^2-2y+1$$
$$\left[36x^2-72x+36+24xy-24x-24y+24+4y^2-8y+4\right]+\left[\ 9z^2-54z+81+18zy-18z-54y+54+\right.$$
$$\left.9y^2-18y+9\ \right]=y^2-2y+1$$
$$36x^2+4y^2+9y^2-y^2+9z^2+24xy+18yz-24x-72x-24y-8y-54y-18y+2y-$$
$$-54z-18z+36+24+4+81+54+9-1=0$$
$$36x^2+12y^2+9z^2+24xy+18yz-96x-102y-72z+207=0$$
que es la ecuación que buscamos.

Una ecuación representa una superficie cónica con vértice en el origen de coordenadas si es homogénea en las tres variables y es de grado no menor que dos.

Cuidado!!!: La ecuación $x^2+2y^2+4z^2=0$ es homogénea en x, y, z, pero no es la expresión analítica de una superficie cónica sino solo un punto: el origen de coordenadas. Para que sea una superficie cónica tiene que tener un término de diferente signo o bien dos variables multiplicadas en un término, cada una de ellas elevada a la primera potencia, como en el ejemplo que sigue:.

Ejemplo: Identificar y construir la superficie de ecuación $x^2+yz=0$

La ecuación se satisface para el origen x = y = z = 0 pero tiene un número infinito de soluciones asignando valores de diferente signo a las variables y, z.

Para construir la superficie debemos obtener la directriz: para z = 1, la directriz es $x^2=-y\ ;\ z=1$, que resulta ser una parábola en el plano $z=1$.

Actividad: Efectuar una representación gráfica de la superficie estudiada.

<u>Superficies de revolución</u>

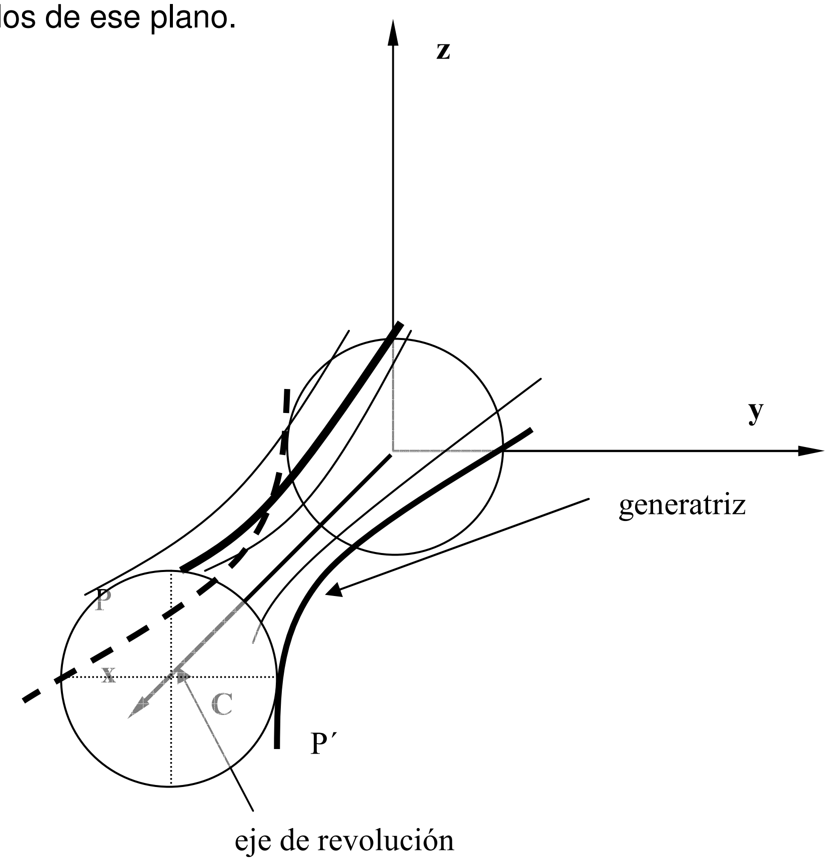
Se genera por una rotación de una curva plana alrededor de una recta fija contenida en el plano de la curva.

La curva recibe el nombre de **generatriz** y la recta fija se denomina **eje de revolución** de la superficie.

Una posición cualquiera de la generatriz se llama **sección meridiana** y cada circunferencia que contenga un punto cualquiera de la generatriz se denomina **paralelo** de la superficie.

La esfera, el cilindro circular recto y el cono circular recto son ejemplos de superficies de revolución. También, bajo ciertas condiciones que veremos al realizar cada estudio, pueden ser superficies de revolución el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide elíptico

A efectos de simplificar las ecuaciones consideraremos la generatriz en uno de los planos coordenados y el eje de revolución será uno de los ejes coordenados de ese plano.



Suponemos que la generatriz ubicada sobre el plano xy tiene por ecuación $f(x,y)=0\ ;\ z=0$ siendo el eje de revolución el eje x.

Sea P(x,y,z) un punto de la superficie . El paralelo que pasa por P corta a la generatriz en un punto P´ del plano xy y su centro está sobre el eje x.

Por ser radios del mismo paralelo

$$\left|\overline{CP}\right| = \left|\overline{CP'}\right|$$

$$\left|\overline{CP}\right| = \sqrt{y^2 + z^2}$$

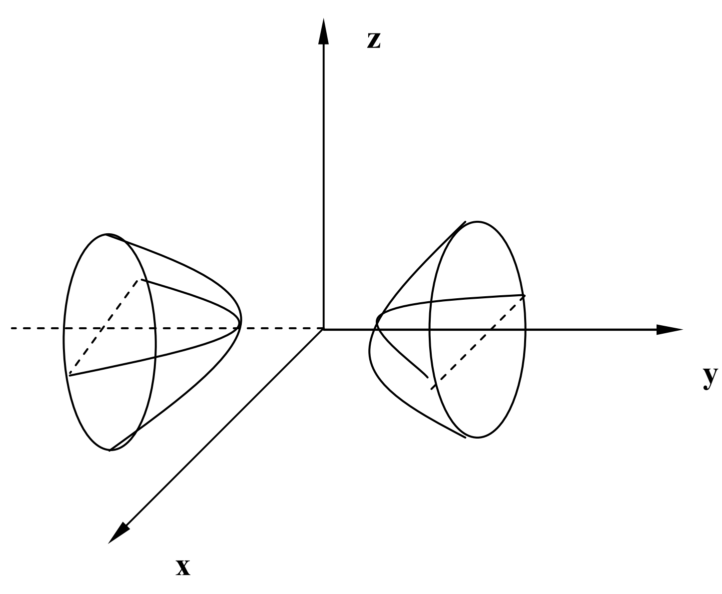
$$\left|\overline{CP'}\right| = y'$$

Resultando $y' = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$ y como P y P´ están en el mismo plano x´ = x

El punto P´ está ubicado sobre la generatriz y por ello podemos escribir: $f(x',y') = 0\ ;\ z' = 0$

Eliminando x´y´z´ entre las ecuaciones anteriores obtenemos $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\,) = 0$
que es la ecuación buscada de la superficie de revolución.

Con igual razonamiento, si hacemos girar la curva generatriz alrededor del eje y, la superficie será $f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}\,; y) = 0$



<u>Ejemplo1:</u> Hallar la ecuación de la superficie generada por la rotación de la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4\ ;\ z = 0$ alrededor del eje y

<u>Solución:</u> De acuerdo a lo visto, sustituimos x por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ en la primera de las ecuaciones, obteniéndose:

$$y^2 - 4(x^2 + z^2) = 4$$

$y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4$ que es la ecuación de la superficie buscada.

<u>Ejemplo 2</u>: Demostrar que la ecuación $9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$ representa una superficie de revolución. Hallar su eje de revolución y la ecuación de la generatriz de uno de los planos coordenados que contenga al eje.

<u>Solución:</u> Los planos z = k cortan la superficie en las circunferencias $9x^2 + 9y^2 = 9 + k^2; z = k$ cuyos centros están sobre el eje z.

Por esta razón $9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$ representa analíticamente una superficie de revolución cuyo eje de revolución es el eje z.

La traza en la superficie sobre el plano x= 0, o sea la generatriz es la curva de ecuaciones:

$$9y^2 - z^2 = 9\ ;\quad x = 0$$

<u>Actividad:</u> Interpretar geométricamente este problema.