ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

TEMA: Ecuaciones Diferenciales

- Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
- Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Métodos de derivación e integración de funciones

I) **Determinar el orden y el grado de las siguientes Ecuaciones Diferenciales:**

a) $y' = x - 3$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

c) $(y'')^3 + (y')^4 + 2y = x$

d) $y''' + 5(y'')^2 + y' = \operatorname{sen} x$

e) $y' + x = (y - x\,y')^3$

II) **Expresar mediante una ecuación diferencial cada una de las siguientes situaciones**

a) La velocidad en que se convierten 100 gr. de azúcar en agua en dextrosa es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. Expresar cómo una Ecuación Diferencial la velocidad de conversión después de t minutos.

b) La pendiente de una curva en cada punto (x,y) es igual al doble de la suma de la coordenadas del punto. Hallar la Ecuación Diferencial que represente esta condición.

III) **Hallar la Ecuación Diferencial asociada con la solución general:**

a) $x^2 y^4 = C$

b) $y = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x$

c) $y = \operatorname{sen}(x + A)$

d) $y = A\,e^{x} + B$

IV) **Verificar que las siguientes familias de funciones son soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales:**

a) $y = 4x + C\,e^{x}$ $\qquad$ $y' - y = 4(1-x)$

b) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x}$ $\qquad$ $y'' - y = 0$

c) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + x$ $\qquad$ $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$

V) **Ecuaciones diferenciales de primer orden**

1) Resolver mediante el método de variables separables

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-1}{y^2}$ $\qquad$ b) $y' = 3.\,x^2y$

c) $\dfrac{1}{3}y' = x^2 + x^2y^2$ $\qquad$ d) $3.x.y\,dy + 4.y^2dx = dx$

e) $2.y.y' + y' - 4.x = 3.x^2 + 2$ si $y(0) = -1$ $\qquad$ f) $y' = 2.\sqrt{y+1}\,.\cos x$ si $y(\pi) = 0$

g) $dy - \operatorname{tg}x.dx - y^2.\operatorname{tg}x.dx = 0$ si $y(0) = \sqrt{3}$

2) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

a) $x^2 - y^2 = c$ $\qquad$ b) $y^2 = cx$ $\qquad$ c) $y^2 = c\,x^3$ $\qquad$ d) $x.y = c$

e) $x^2 + 2y^2 = c$ $\qquad$ f) $x + 2y = c$ $\qquad$ g) $y = c\,e^{-2x}$ $\qquad$ h) $3.x^2 + 3.y^2 = c$

3) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas

a) $(\cos x.\cos y + 2x)dx - (\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y + 2y)dy = 0$

b) $(e^xy + x\,e^xy)dx + (x\,e^x + 2)dy = 0$ si $y(0) = -1$

c) $\cos\theta dr + (e^{\theta} - r.\operatorname{sen}\theta)d\theta = 0$

d) $[2x + y^2 - \cos(x+y)]dx + [2xy - \cos(x+y) - e^y]dy = 0$

4) Resolver las ecuaciones diferenciales lineales:

a) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ $\qquad$ b) $y' + \operatorname{tg}x.\,y = \sec x$ $\qquad$ c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 5.x^3$

d) $y' - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$ $\qquad$ e) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ $\qquad$ f) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy^{-2}$

5) Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $y^2 – x.y + x^2.y' = 0$

b) $(xy + x^2 + y^2)dx = x^2dy$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{3.x.y}$

d) $y' = \dfrac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{x.y}$

VI) **Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes:**

1) Resolver las ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ b) $y'' - 5y' = 0$ c) $y'' - 2y' + 5y = 0$

d) $y'' + y = 0$ e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ f) $y'' - y' - 6 y = 0$

2) Resolver utilizando el método de los coeficientes indeterminados:

a) $y'' - y = -11x +1$ b) $y'' + y' - 2y = x^2 – 2x + 3$ c) $y'' - y' - 12y = e^{2x}$

d) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$ e) $y'' + 2y' - 3y = 7\cos(3x)$ f) $y'' - 5y' + 6y = x.e^x$

g) $y'' - 4y' + 4y = x.e^{2x}$ h) $y'' + y = \operatorname{sen}x$ i) $y'' + 4y = \operatorname{sen}x - \cos x$

VII) **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden incompletas:**

a) $2.x.y'' - y' + (y')^{-1} = 0$ b) $2.y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ c) $2.y'' = 2.x.e^x + x^2$

VIII)**Resolver de la manera más conveniente las siguientes ecuaciones diferenciales**

1) $(x^2 - y)\, dx - x\, dy = 0$ Rta: $xy = \dfrac{x^3}{3} + C$

2) $xy\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$ Rta: $y^2 (1 + x^2) = C$

3) $y'' - 3y' + 2 y = e^{2x}$ Rta: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \dfrac{x.e^{2x}}{12}$

4) $y' + y = 2 + 2 x$ Rta: $y = 2 x + C e^{-x}$

5) $y'' + 9 y = \cos x$ Rta: $y = C_1\cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{8}\cos x$

6) $y'' + 2 y' + y = 0$ Rta: $y = C_1.e^{-x} + C_2 .x .e^{-x}$

IX) **Aplicaciones**

1) Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremo libre se ha sujetado una masa de **m** kilogramos. Si la masa se mueve con velocidad Vo [$^{m}/_{seg}$] cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad V como función del alargamiento en metros.

Ley de Hooke: Fuerza sobre el cuerpo = peso del cuerpo – fuerza del resorte por d x

$m\dfrac{dv}{dt} = mg - kx$ multiplicando y dividiendo por dx: $m\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = mg - kx$ con $\dfrac{dx}{dt} = V$

la ecuación diferencial será: $m.V\dfrac{dv}{dx} = mg - kx$, integrando: $mV^2 = 2\,m\,g\,x - k\,x^2 + c$

para $x = 0$ se tiene $V = V_o$ entonces $c = mV_o^2$

por lo tanto: $m\,V^2 = 2\,m\,g\,x - k\,x^2 + m\,Vo^2$

2) Hallar la ecuación diferencial que exprese la fuerza total a la que esta sujeta una partícula de masa **m** que se mueve linealmente si se le aplica una fuerza F_1 proporcional y contraria a su desplazamiento y una fuerza resistente F_2 proporcional a su velocidad.

$F_1 = -K_1\,x$ como $F = m.a$ K_1 y K_2 : factor de proporcionalidad

$F_2 = -K_2\dfrac{dx}{dt}$

la fuerza total será : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -K_1\,x - K_2\dfrac{dx}{dt}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

TEMA: Funciones de varias variables

- Determinación del dominio y descripción del recorrido
- Gráfico de funciones
- Curvas y superficies de nivel

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Funciones de una variable: Dominio-Gráfica
- Cónicas: Identificación-Gráfica
- Cuádricas: Identificación-Gráfica

1. Determinar si **z** es función de **x** e **y**

   a) $x^2 z + yz - xy = 10$ b) $(x^2/4) + (y^2/9) + z^2 = 1$

2. Encontrar el valor de la función en el punto indicado:

a) $f(x,y) = xe^y$ P(5;0) b) $V(r;h) = \pi r^2 h$ P(2;3) c) $f(x,y) = \int_x^y (2t-3)dt$ P(1;4)

3. Determinar y graficar el dominio. Describir el recorrido:

   a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ b) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$

   c) $f(x,y) = \ln(4-x-y)$ d) $f(x,y) = e^{x/y}$

   e) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ f) $f(x,y) = x.y$

   g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ h) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

   i) $f(x,y) = 1/x.y$ j) $f(x,y) = y-x$

4. Dibujar la superficie gráfica de la función

   a) $f(x,y) = 5$ b) $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$ c) $f(x,y) = e^{-x}$

   d) $f(x,y) = y^2$ e) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

5. Dibujar y describir las curvas de nivel de la función para el valor indicado

a) $f(x,y) = x + y$ k= 0, k= 1 b) $f(x,y) = e^{x.y}$ k = 1, k = 2

c) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ k=0, k = 3 d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ k = 0, k =1

e) $f(x,y) = x/(x^2 + y^2)$ k =-1, k = 1 f) $f(x,y) = x.y$ k = -1, k = 1

g) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ k = 0, k = 1 h) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ k = 1, k = 1/2

6. Dibujar la superficie de nivel para el valor indicado

a) $f(x,y,z) = x -2y +3z$ k = 6 b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ k = 4

c) $f(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 - z^2$ k = 0 d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ k = -4

e) $f(x,y,z) =\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ k = 1 f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ k = 9

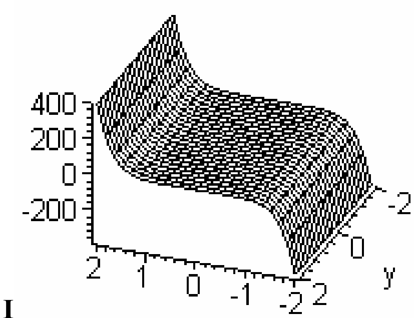
7. Encontrar la curva de nivel de f(x,y) que pasa por el punto dado y graficar:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 1}$ P(1;0) b) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ P(1; $\sqrt{24}$)

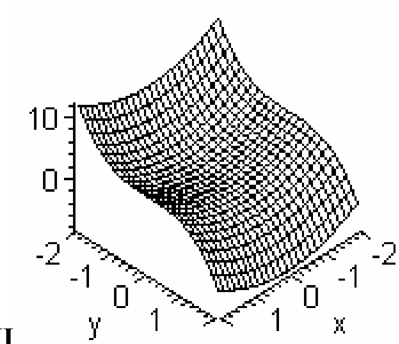
8. Establecer la correspondencia entre las funciones y las superficies.

a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ b) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ c) $f(x,y) = x^2 + 3x^7$

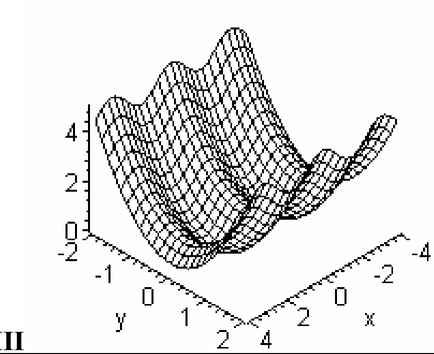
d) $f(x,y) = x^2 - y^3$ e) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x^2 + y^2)$ f) $f(x,y) = \cos^2 x + y^2$



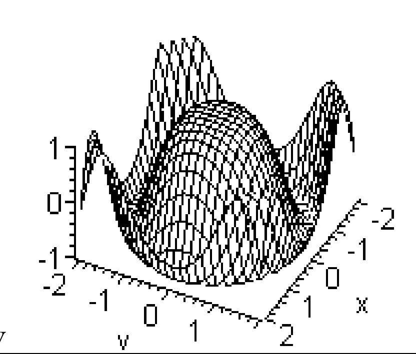
I



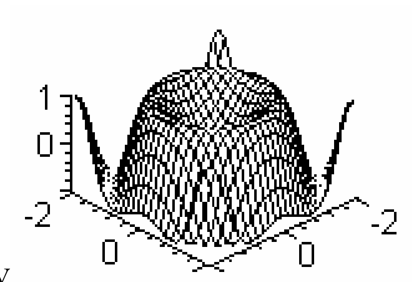
II



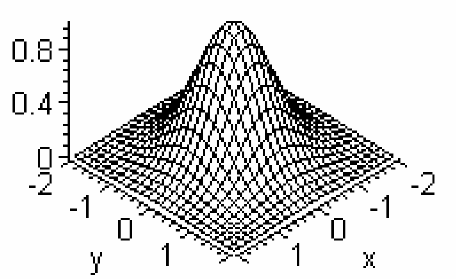
III



IV



V



VI

9. Establecer la correspondencia entre las funciones y las curvas de nivel:

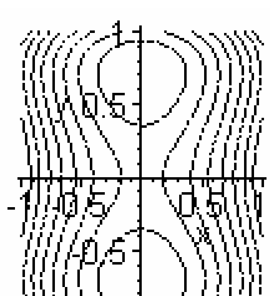
a) f(x,y) = cosx.cosy. $e^{-\sqrt{x^2+y^2}\,/\,4}$

b) f(x,y) = - x.y ^{2}/(x^2 + y^2)

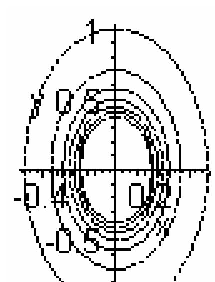
c) f(x,y) = 1/(4.x^2 + y^2)

d) f(x,y) = y^2 – y^4 - x^2

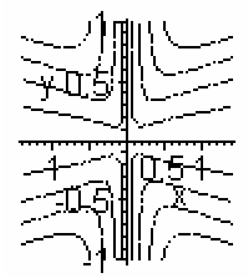
I



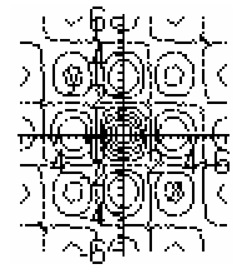
II



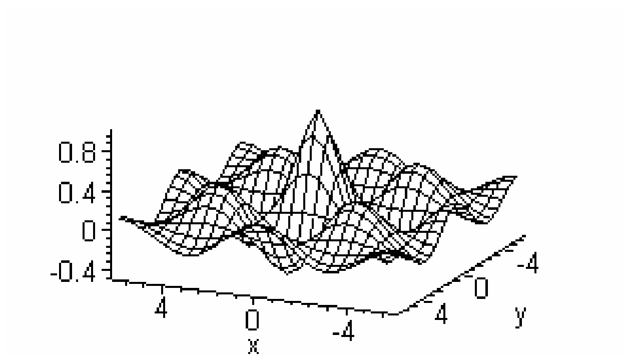
III



IV



10) Con cuál de las funciones del ejercicio anterior se corresponde la superficie:



ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

TEMA: Límite de funciones de varias variables.

- Límite y continuidad de funciones de dos y tres variables.
- Propiedades.
- Regla de las dos trayectorias.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Límite y continuidad de funciones de una variable.

1. Sabiendo que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 3$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 2$

calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{3f(x,y)+g(x,y)}{g(x,y)}$

2. Calcular, si existe, el límite

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{x}{\sqrt{x+y}}$

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,1)} \dfrac{x.z}{x+y+z}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-2.x.y+y^2}{x-y}$

e) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{x.y-y-2.x+2}{x-1}$

f) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.y}{2.x^2+y^2}$

h) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\ y\neq 3-x}} \dfrac{x-2}{x+y-3}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2.x-y^2}{2.x^2+y^2}$

j) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\ x\neq 1}} \dfrac{x.y-2.x}{(x-1).e^y}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2.(y-1)}{x^4+4.(y-1)^2}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Verificar, usando la definición, que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.y}{x^2+y^2} = 0$$

4. a) Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ¿ *f* debe estar definida en *(a, b)* ? Justificar.

b) Si *f(a, b)* =3 ¿ Qué puede decir acerca de $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ si *f* es continua en *(a,b)* ? ¿Y si *f* no es continua en *(a,b)* ? Explicar.

5. Analizar la continuidad de la función.

a) $f(x,y) = sen(2.x.y^3 + 3.x^2 y)$

b) $f(x,y,z) = x.sen(z^2y)$

c) $f(x,y) = ln(x + 2y)$

d) $f(x,y) = x^3 / y$

e) $f(x,y) = \begin{cases} x + y & si\ (x,y) \neq (1,2) \\ 4 & si\ (x,y) = (1,2) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2.y^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. Definir *f(0,0)* de manera que $f(x,y) = \dfrac{x^2.y}{x^2+y^2}$ resulte continua en el origen

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

TEMA: Derivadas parciales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Reglas de derivación para funciones de una variable.

1. Dada $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y$. Aplicando la definición de derivadas parciales, hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

2. Obtener las primeras derivadas parciales de $z = f(x,y)$

a) $f(x,y) = \tan(x^4.y^3) - x / y^2$ b) $f(x,y) = (x^3 - x.y^2)^2 - y/(2x)$
c) $f(x,y) = e^2.\ln(x.y) + 3x$ d) $f(x,y) = x.\tan(y) + 2y.\text{sen}(x)$
e) $f(s,t) = t/s + s/t$ f) $f(s,t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

3. a) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva intersección el plano $x = 3$ con la superficie $36z = 4x^2 + 9y^2$ en el punto $(3;2;2)$

b) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva intersección el plano $y = 3$ con la superficie $z = 9x^2 - y^2$ en el punto $(1;3;0)$

4. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Verificar que f no es continua en (0,0)
b) Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

5. Verificar que $f_{xy} = f_{yx}$ para todo (x,y) de R^2, siendo $f(x,y) = x^4.y - 2x.y^3 - 3y$

6. Una función se llama armónica si cumple con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en el dominio de f. Probar que las funciones dadas son armónicas:

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ b) $f(x,y) = e^{-x}\cos(y) + e^{-y}\cos(x)$ c) $f(x,y) = \text{arctg}(x/y)$

7. La ecuación de onda es $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2}$ siendo a una constante.

Verificar que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda:
a) $v(x,t) = sen(a.k.t).sen(k.x)$ b) $v(x,t) = (x - at)^4 + cos(x + at)$

8. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y.(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Hallar $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$
b) Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$
c) Hallar $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$ ¿Qué se puede decir con respecto a la continuidad de las funciones f_{xy} y f_{yx} ?

9. Probar que la función $W = sen(ax).cos(by).\, e^{-\sqrt{a^2+b^2}.z}$ con a y b constantes, satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

10. La ley de los gases ideales puede escribirse como P.V = n.R.T, donde n es el número de moles del gas, V el volumen, T la temperatura absoluta, P la presión y R una constante. Probar que:

$$\frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

11.Demostrar que las funciones u(x,y) y v(x,y) satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

a) $u(x,y) = x^2 - y^2$; $v(x,y) = 2xy$
b) $u(x,y) = cos(x).cosh(y) + sen(x).senh(y)$ $v(x,y) = cos(x).cosh(y) - sen(x).senh(y)$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

TEMA: Incrementos y Diferenciales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Cálculo de derivadas parciales de funciones de varias variables.

1. Escribir el incremento y la diferencial total de f

a) $f(x,y) = x^2 /(y +1) + y.\text{sen}x$ b) $f(x,y,z) = \cos(x.y) + \ln(y + 2z)$

2. Dada $f(x,y) = 3.x^2 + 2.x.y – y^2$

a) Calcular el incremento de f en $P_o(1;4)$ para $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$

b) Calcular la diferencial total de f en $P_o(1;4)$ para $dx = 0.03$ y $dy = -0.02$

c) Comparar los resultados obtenidos en a) y b)

3. Dada $f(x,y,z) = x.y +\ln(y.z)$

a) Calcular el incremento de f en $P_o(4;1;5)$ para $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.04$ y $\Delta z = -0.03$

b) Calcular la diferencial total de f en $P_o(4;1;5)$ para $dx = 0.02$, $dy = 0.04$ y $dz = -0.03$

c) Comparar los resultados obtenidos en a) y b)

4. Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables en todo su dominio

a) $f(x,y) = y.\ln(x) – x/y$ b) $3.\ln(x.y) + 5.\text{sen}(x)$ c) $f(x,y) = y.e^{3.x} – x.e^{-3.y}$

5) Dada la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) Es continua en (0,0)?

b) Es diferenciable en (0,0)?

c) Calcular usando diferenciales el valor aproximado de f(4.01;2.99)

6. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ¿Existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$? (*ver ejercicio 4 del Práctico Nº3*)
b) ¿Es diferenciable en (0;0)? Porqué?

7. Calcular aproximadamente la cantidad de material necesario para construir un recipiente cerrado en forma de prisma rectangular de longitud interior de 8 m, ancho interior de 5 m y con un espesor de 4 cm.

8. Calcular aproximadamente el error máximo al hallar el área de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 6 y 8 cm, con un posible error de 0.1cm en la medición.

9. Calcular aproximadamente el material necesario para fabricar un vaso cilíndrico con las siguientes dimensiones:
radio interior: **r = 5cm** altura: **h = 15cm** espesor (paredes y fondo): **k = 0.02cm**

10. La densidad relativa de un objeto esta dada por **d** = P/(P –W) siendo
P: peso en el aire W: peso en el agua
Si P = 20Kg con un error posible de 0.01Kg y W = 12Kg con un error posible de 0.02Kg. Determinar el máximo error posible en el cálculo de **d**

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

TEMA: Regla de la cadena para funciones de varias variables. Derivación parcial implícita

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Cálculo de derivadas parciales de funciones de varias variables.
- Composición de funciones

1.Hallar la derivada du/dt

i) Convirtiendo a **u** en una función de **t** antes de derivar

ii) Aplicando la regla de la cadena

a) $u = \ln(x.y) + y \qquad x = e^t \qquad y = e^{-t}$

b) $u = x.\,e^y + y.e^x \qquad x = 3.\cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$

2. Hallar du/dt empleando la regla de la cadena

a) $u = \operatorname{arctg}(y/x) \qquad x = \ln t \qquad y = e^t$

b) $u = x^2 + y^2 \qquad x = e^t.\cos t \qquad y = e^t$

c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = \operatorname{tg} t \qquad y = \cos t \qquad z = \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t < \pi/2$

3. Obtener las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ mediante la regla de la cadena.

a) $u = 3.x - 4.y^2 \qquad x = 7.rs \qquad y = 5.\,r^2$

b) $u = e^{y/x} \qquad x = 2.r.\cos s \qquad y = 4.r.\operatorname{sen} s$

c) $u = \operatorname{ch}(y/x) \qquad x = 3.\,r^2.s \qquad y = 6.s.\,e^r$

4. Calcular las derivadas parciales que se indican.

a) $\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ si: $u = x.\operatorname{sen} y \qquad x = \operatorname{arctg}(r + s.t) \qquad y = \ln(r.s + 3.s.t)$

b) $\dfrac{\partial w}{\partial \rho}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}, \dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$ si: $u = x^2 + y^2 + z^2$, $x = \rho.\operatorname{sen}\varphi.\cos\theta$, $y = \rho.\operatorname{sen}\varphi.\operatorname{sen}\theta$, $z = \rho.\cos\varphi$

5. La altura de un cilindro circular recto disminuye a razón de 10cm/min y el radio crece 4cm/min. Encontrar la razón de cambio del volumen en el instante en que la altura es de 50cm y el radio de 16cm.

6. Cierta cantidad de gas obedece la ley del gas ideal P.V = K.T, con K = 12. El gas se calienta 3ºC por minuto. Si en el instante en que la temperatura es de 300ºC la presión es de 6N/cm^2 y disminuye 0.1N/cm^2 por minuto, determinar la razón de cambio del volumen en ese instante.

7. Siendo y = f(x) encontrar dy/dx por derivación implícita.

a) $x^2 - y^2 .x - 2 = 0$

b) $x. e^y - y.e^x + x/y = 0$

c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} -3.xy = 1$

8. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio 7.a) en el punto (2;1)

9. Sabiendo que z = f(x,y), hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ por derivación implícita.

a) $e^z + x^2.y + z + 5 = 0$

b) $\text{sen}(x.y) + \cos(x.z) - y.z = 0$

c) $\sqrt{xy} - y/z = 5$

d) $\cos(x + y) - \text{sen}^2(x.y.z) = 0$

e) $xyz - \ln(x.y.z) = 0$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

TEMA: Funciones vectoriales-Curvas

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Gráficas de curvas.
- Vectores en R^2 y R^3

1. Para las siguientes curvas:

I) Escribir las ecuaciones paramétricas

II) Escribir la ecuación vectorial paramétrica

a) $2x + 3y = 6$ b) $x^2 + y^2 = 49$

c) $x^2 - y = 0$ d) $y^2 - x = 1$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ f) $4x^2 + 9y^2 = 36$

g) $9(x-1)^2 + (y+2)^2 = 36$ h) $4x^2 - 9y^2 = 36$

i) $\begin{cases} y + 2z = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

2. Dada la ecuación vectorial escribir las ecuaciones paramétricas y cartesianas (en el caso de curvas de R^3, ver ej. 1.i) y 1.j))

a) $r(t) = 4(t+1)\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ b) $r(t) = 3\cos t\ \vec{i} + \operatorname{sen} t\ \vec{j}$ con $0 \le t \le \pi$

c) $r(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ d) $r(t) = (1+3t)\,\vec{i} + (2-t)\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$

3. a) Encontrar r'(t) para cada una de las funciones vectoriales del ejercicio anterior

b) Dibujar en un mismo gráfico la curva del ejercicio 2.a) junto a los vectores r(-1/2) y r'(-1/2)

4. $r(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$ representa la posición de una partícula en el instante t, ¿cuál es su velocidad? ¿y la rapidez?

5. Calcular $\int_0^{\frac{1}{2}} (2\cos t\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{j} + t\,\vec{k})\,dt$

7. Dadas las funciones vectoriales :

$r_1(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$ con $0 \le t \le 2\pi$ $\quad r_2(t) = \cos(2t)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(2t)\,\vec{j}$ con $0 \le t \le \pi$

a) ¿Las funciones vectoriales son iguales ?

b) ¿Son iguales sus gráficas?

c) Si cada una de ellas representa la posición de una partícula en el instante t, ¿dichas partículas se mueven de la misma manera en el intervalo dado? ¿cuál es la rapidez en cada caso?

8. $r(t) = t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j}$ representa la posición de una partícula en el instante t. ¿Qué distancia recorre en el intervalo de tiempo [0; 3]?

9. Calcular la longitud de arco de las siguientes curvas en el intervalo indicado:

a) $r(t) = 2\operatorname{sen} t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j}$ $\quad [0; 2\pi]$

b) $r(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \frac{2}{3}t^3\,\vec{k}$ $\quad [0 ; 2]$

c) $r(t) = e^t.\cos t\,\vec{i} - e^t.\operatorname{sen} t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$ $\quad [0 ; \ln 3]$

10. Encontrar el vector tangente unitario a la curva

a) $r(t) = e^t.\cos t\,\vec{i} - e^t.\operatorname{sen} t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$ en $t = 0$

b) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ en $t = 1$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 8

TEMA:

- Derivada Direccional – Gradiente (en la dirección de un vector)
- Ecuación del Plano Tangente – Recta Normal a la Superficie

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Derivadas parciales – Vectores en R^2 y R^3
- producto escalar – producto vectorial

EJERCICIOS RESUELTOS

- La derivada direccional de una función en un punto y en la dirección de un vector unitario es, por definición, el límite de un cociente incremental siempre que éste exista. Es decir, **un número** y dicho número representa ….. *¿qué representa?*

- El gradiente de una función de dos variables en un punto es **un vector** de R^2 que se obtiene a partir de las derivadas parciales de la función en dicho punto. Al graficar en el plano xy este vector y la curva de nivel que pasa por el punto se ve que….. *¿cómo son el vector y la curva? ¿dónde ubican el origen del vector?*

- Volviendo al cálculo de la derivada direccional, si f cumple con ciertos requisitos……. *¿cuáles son?* entonces el cálculo se puede simplificar usando el gradiente de la función en el punto dado.

- **Ejemplo:**

  Se busca calcular la derivada direccional de $f(x,y) = xy + y^2$ en P(1,2) y en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

usando la definición:

$$D_u f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t.\frac{3}{5},2+t.\frac{4}{5})-f(1,2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t.\frac{3}{5})(2+t.\frac{4}{5})+(2+t.\frac{4}{5})^2-(1.2+2^2)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2+\frac{4}{5}t+\frac{6}{5}t+\frac{12}{25}t^2+4+\frac{16}{5}t+\frac{16}{25}t^2-6}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{26}{5}t+\frac{28}{25}t^2}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{26}{5}+\frac{28}{25}t\right)$$

= **26/5** el límite existe y es **un número**

A pesar de ser una función polinómica, muy sencilla, para calcular esta derivada hubo que hacer muchos cálculos a fin de salvar la indeterminación

Esta función tiene la propiedad de ser diferenciable en todo punto de R² *¿por qué?* y por ende en P(1,2) entonces, usando el gradiente en el punto, tenemos una forma rápida y sencilla para el cálculo: $D_u f(1,2) = \nabla f(1,2)\ .\ \vec{u}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2.y$ $\qquad$ por lo tanto el gradiente es el **vector**:

$$\nabla f(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\ \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\ \vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

calculando el <u>producto escalar</u> entre el vector gradiente y el vector unitario $\vec{u}$

$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2)\ .\ \vec{u} = (2\vec{i} + 5\vec{j}).(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}) = 2\ .\ 3/5 + 5\ .\ 4/5 = 6/5 + 4 =$ **26/5**

como era de esperar.

Antes de aplicar esta forma de cálculo hay que verificar que f sea diferenciable en el punto. Cuidado con el ejercicio 6!!

Observación: el vector que nos da la dirección debe ser **unitario**, en caso que no sea así, por ejemplo $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ se debe tomar $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{3.\vec{i} + 4.\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtener la derivada direccional de f en la dirección del vector dado en el punto P indicado:

   a) $f\ (x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2$; $\vec{u} = \cos(\pi/4)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(\pi/4)\,\vec{j}$; $P\,(1\,;\,1)$

   b) $f\ (x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$; $P\,(3\,;\,4)$

   c) $f\ (x,y) = \dfrac{1}{x - y}$; $\vec{u} = \dfrac{12}{13}\vec{i} - \dfrac{5}{13}\vec{j}$; $P\ (2,1)$

2. Hallar el gradiente de la función en un punto arbitrario (x,y):

   a) $f\,(x,y) = e^{2\,x\,y}$

   b) $f\,(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}$

   c) $f\,(x,y,z) = x\,.\ \operatorname{sen}(y\,z)$

   d) Trazar la curva de nivel C de f que pasa por el punto P y el gradiente de f en P (punto inicial P)

      i) $f\ (x,y) = y^2 - x^2$ $P\,(2;\,1)$

      ii) $f\ (x,y) = x^2 - y$ $P\,(-3;\,5)$

3. Encontrar la función escalar f tal que:

   a) $\nabla f\,(x,\,y,z) = 2\,x\,\vec{i} + 2\,y\,\vec{j} + 2\,z\,\vec{k}$

   b) $\nabla f\,(x\,,\,y) = e^x\,.\operatorname{sen}y\,\vec{i} + e^x\cos y\,\vec{j}$

   c) $\nabla f\,(x\,,\,y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$

4. Hallar el valor de la derivada direccional de la función f en el punto P_0 y la dirección del vector indicado para cada caso (utilizando, si fuera posible, el gradiente de la función):

   a) $f(x,y) = x^2 - 4y$; $P_0 = (-2, 2)$ $\vec{u}$ = es el vector que forma un ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con el eje positivo de la x.

   b) $f(x,y) = 2\,e^{2y}$; $P_0 = (2, 0)$; $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j}$

   c) $f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P_0 = (-2, 1, 3)$; $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$

5. Hallar $D_u\, f$ en P y en la dirección P hacia Q:

   a) $f(x,y) = x^2 \cdot e^{-y}$; $P = (2, 0)$ $Q = (-3, 1)$

   b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P = (-2, 3, 1)$ $Q = (0, -5, 4)$

6. Sabiendo que f(x,y) tiene $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ y que $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\vec{i} + \dfrac{4}{5}\vec{j}$ ¿Es esta información suficiente para decir que $D_u f(0,0)$ existe? Ejemplificar y explicar.

7. Sea $f(x,y) = x^2 + x^3 y^2$ y $P_0 = (1, -2)$

   a) Hallar la dirección para la cual f crece más rápidamente a partir de P_0 .

   b) Hallar el mayor cambio instantáneo en P_0.

   c) ¿En qué dirección es mínima la derivada direccional en P_0?.

   d) ¿Cuál es el menor cambio instantáneo en P_0?.

8. La temperatura es de T grados en cualquier punto de una placa rectangular que está en el plano x y y $T = f(x\,y) = x^2 y^3$. Sea $P\,(2\,;\,3)$

   a) ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura T en P ?

   b) ¿En qué dirección disminuye más rápidamente la temperatura T en P ?

   c) ¿En qué dirección se anula ?.

9. La derivada de $f(x, y)$ en P_0 (1,2) en la dirección de $a = \vec{i} + \vec{j}$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $b = -2\vec{j}$ es -3. ¿Cuál es la derivada de f en la dirección de $-\vec{i} - 2\vec{j}$?. Justificar la respuesta.

10. ¿Hay alguna dirección en la que la razón de cambio de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ en P (1; 2) sea igual a 14 ?. Justificar la respuesta.

11. Hallar un vector normal unitario a la superficie en el punto P :

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad P_0\,(3; 4; 5)$

b) $x^2 y^4 - z = 0$ $\quad P_0\,(1; 2; 16)$

c) $z - x \operatorname{sen} y = 4$ $\quad P_0\,(6; \frac{\pi}{6}; 7)$

12. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto P_0 :

a) $x y z = 10$ $\quad P_0\,(1; 2; 5)$

b) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$ $\quad P_0\,(1; -2; 3)$

c) $x^3 y + y^2 x^2 + \operatorname{sen}(y z) + 54 = 0$ $\quad P_0\,(3; 0; -2)$

d) $y = e^x \cos z$ $\quad P_0\,(1; e; 0)$

e) $x^2 y z + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$ $\quad P_0\,(1; 2; -1)$ ¿En qué punto la normal corta al plano $x + 3y - 2z = 10$?

f) $x^2 = 12y$ $\quad P_0\,(6; 3; 3)$

13. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto P_0 :

a) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad P_0\,(1; 2; 2)$

b) $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ $\quad P_0\,(1; 1; \pi/4)$

c) $z = e^{3x} \cdot \operatorname{sen} 3y$ $\quad P_0\,(0; \pi/6; 1)$

d) $z = \ln(x y)$ $\quad P_0\,(1/2; 2; 0)$

14. Comprobar :

a) El plano tangente al elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto

(x_0, y_0, z_0) tiene la ecuación $\dfrac{x_0\, x}{a^2} + \dfrac{y_0\, y}{b^2} + \dfrac{z_0\, z}{c^2} = 1$

b) Todos los planos tangentes al cono $z^2 = a^2\, x^2 + b^2\, y^2$ pasan por el origen.

15. Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en punto dado:

a) $\begin{cases} x + y^2 + 2\, z = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ $P\,(1; 1; 1)$

b) $\begin{cases} x\, y\, z = 1 \\ x^2 + 2\, y^2 + 3\, z^2 = 6 \end{cases}$ $P\,(1; 1; 1)$

c) $\begin{cases} x^3 + 3\, x^2\, y^2 + y^3 + 4\, x\, y - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11 \end{cases}$ $P\,(1; 1; 3)$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 9

TEMA:

- Extremos de funciones de varias variables
- Multiplicadores de Lagrange

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Cálculo de derivadas parciales
- Resolución de sistemas de ecuaciones

EJERCICIOS RESUELTOS

- Dado el problema de encontrar **el** o **los** extremos relativos de una función de dos variables, si es que existen, ya se sabe que el primer paso consiste en obtener las primeras derivadas parciales respecto de cada una de las variables independientes para encontrar **todos** los puntos críticos que tenga, es decir, **todos los puntos del dominio** en los que alguna de las derivadas no exista o bien en donde **ambas** derivadas se anulen.

- Aquí es en donde debemos prestar mucha atención ya que al tratar de despejar x o y podríamos cometer errores (muy frecuentes…) que nos lleven a encontrar puntos que no satisfacen el sistema de ecuaciones u otro tipo de errores, los que nos hacen perder información, es decir, que no encontremos la totalidad de los puntos críticos.

- **Veámoslo con un ejemplo:**

Dada $f(x,y) = xy^2 - x^3 + x^2 + 2y^2 + 2$, es una función en donde los únicos puntos críticos que pueden aparecer son los que anulen simultáneamente las primeras derivadas parciales:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 - 3x^2 + 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2xy + 4y = 0 \end{cases}$$

en este caso comenzaremos trabajando con la segunda ecuación porque se ve más sencilla que la primera, entonces: $2xy + 4y = 0$

¡¡Cuidado!! Un **error frecuente** es hacer un *pasaje de términos* y llegar a: $2xy = -4y$ entonces queda $xy = -2y$ pero para poder despejar "x" necesito saber de antemano que "y" no es cero y no es éste el caso.

$\Rightarrow 2y(x+2) = 0 \Rightarrow y = 0$ o $x = -2$

Siempre conviene expresar las derivadas como producto con la mayor cantidad de factores que sea posible

<u>1º Caso</u>: **Si y=0** la primer ecuación queda $-3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-3x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 2/3$ y así se encuentran los puntos críticos **$P_1(0, 0)$** y **$P_2(2/3, 0)$**

<u>2º Caso</u>: **Si x=-2** la primer ecuación queda $y^2 - 3.\,2^2 - 2.2 = 0 \Rightarrow y^2 - 12 - 4 = 0 \Rightarrow$ $y^2 = 16$ entonces $y = 4$ o $y = -4$ con lo cual se obtienen **$P_3(-2,4)$** y **$P_4(-2,-4)$**

En definitiva se encontraron cuatro puntos críticos distintos….

¿Qué hubiera ocurrido de continuar con el error frecuente despejando "x"?
Se hubiera perdido información, se llegaba a $x = -2$ encontrando **solo dos** puntos críticos: $\mathbf{P_3(-2,4)}$ y $\mathbf{P_4(-2,-4)}$ y la respuesta quedaba incompleta.

Ahora continúa el proceso buscando las segundas derivadas parciales para tratar de averiguar cuáles de estos puntos corresponden a extremos relativos.

$f_{xx}(x,y) = -6x+2 \qquad f_{yy}(x,y) = 2x+4 \qquad f_{xy}(x,y) = 2y$

entonces $H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x+2).(2x+4) - (2y)^2$

en $\mathbf{P_1(0, 0)}$ $H(0,0) = 8 > 0$ con $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ la función alcanza el valor mínimo relativo $f(0,0) = 2$
en $\mathbf{P_2(2/3,0)}$ $H(2/3,0) < 0$ no tiene extremo, lo mismo que en $\mathbf{P_3(-2,4)}$ y $\mathbf{P_4(-2,-4)}$ (verificarlo)

- **Otro ejemplo:**

$f(x,y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$ es otra función en la que los puntos críticos, si existen, son los que anulen simultáneamente a las primeras derivadas parciales

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 24x^2 + 6y = 0 \Rightarrow 4x^2 + y = 0 \quad (1) \\ f_y(x,y) = 3y^2 + 6x = 0 \Rightarrow y^2 + 2x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

de (1) $4x^2 = -y \Rightarrow y^2 = 16x^4$ reemplazando en (2) $16x^4 + 2x = 0$ sacando factor común $2x(8x^3+1) = 0$ con lo cual se obtienen dos posibles valores para x:
$x = 0 \qquad x = -1/2$

¿Cómo utilizo esta información para encontrar las ordenadas de los puntos?
Con $x = 0$ reemplazando en (1) o en (2) se encuentra que $y = 0 \Rightarrow \mathbf{P_1(0, 0)}$ pero con $x = -1/2$ al reemplazar en (2) tenemos $y^2 + 2(-1/2) = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$ o $y = -1$

¡¡ERROR!! Porque el punto (-1/2, 1) si bien satisface la segunda ecuación no satisface la primera

¿Cómo es que se llega a cometer ese error?

Respuesta: Como los valores de x se encontraron luego de trabajar en la **segunda ecuación** lo correcto hubiera sido usar esa información en la **primer ecuación** y no en la **segunda ecuación**

Por lo tanto, reemplazando en (1), el segundo punto crítico es $\mathbf{P_2(-1/2,-1)}$

- **Multiplicadores de Lagrange:**

Para encontrar los puntos críticos de $f(x,y) = xe^y$ que se encuentran sobre la curva $x^2 + y^2 = 2$ formamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda\, g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda\, g_x(x,y) \qquad \text{donde } g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \text{entonces:} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^y = 2\lambda x & (1) \\ xe^y = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

reemplazando (1) en (2) $x(2\lambda x) = 2\lambda y \Rightarrow 2\lambda(x^2 - y) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (4) o $y = x^2$ (5)

pero (4) no es posible porque en (1) quedaría $e^y = 0$ lo cual es **absurdo** ¿porqué…?

entonces la única posibilidad es $y = x^2$

Al sustituir (5) en (3) $x^2 + (x^2)^2 - 2 = 0$ queda $x^4 + x^2 - 2 = 0$ y resolviendo la ecuación se obtiene:

$x = 1$, $\lambda = e/2$ o $x = -1$, $\lambda = -e/2$ en ambos casos $y = 1$ (verificar), resultando dos puntos críticos. ¿Cuáles? ¿Puede determinar si corresponden o no a extremos?

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar cuando sea posible, si la función tiene extremos relativos:
   a) $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
   b) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   c) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$
   d) $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2$
   e) $f(x,y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$
   f) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$
   g) $f(x,y) = e^{xy}$

2. Para la función $f(x,y)$ resulta que $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ es cero en el origen, a pesar de eso ¿Puede determinar si f tiene un valor máximo, un mínimo o ninguno de los dos en el origen ?
   a) $f(x,y) = x^4 y^4$
   b) $f(x,y) = 1 - x^2 y^2$
   c) $f(x,y) = x y^2$

3. Para $f(x, y, z) = x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$ hallar los puntos críticos y determinar, si es posible, si son máximos o mínimos relativos.

4. Analizar si $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ tiene valores extremos.

5. Calcular los extremos absolutos de la función en la región *R* (en cada caso, *R* contiene sus puntos frontera)
   a) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$
      donde *R* es la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 4$
   b) $f(x,y) = x^2 + xy$
      donde *R* es la región del plano xy dada por

$$R = \left\{ (x,y) \text{ c } R^2 \;\middle/\; |\,x\,| \le 2 \;\;\Lambda\;\; |\,y\,| \le 1 \right\}$$

6. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos que se especifican:
   a) mínimo de $f(x,y) = x^2 - y^2$ si $x - 2y + 6 = 0$
   b) máximo de $f(x,y) = e^{xy}$ si $x^2 + y^2 = 8$
   c) máximo y mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$
   d) mínimo de $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 - 12y + 48$ si $x + y = 8$
   e) máximo y mínimo de $f(x,y) = x^2 e^y$ si $x^2 + y^2 = 3$

7. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos que se especifican
   a) máximo de $f(x, y, z) = x\,y\,z$ si a $x + y + z = 6$
   b) máximo de $f(x, y, z) = x\,y\,z$ si $x + y + z = 32$ y si $x - y + z = 0$
   c) máximo y mínimo de $f(x,y,z) = xy + z^2$ si $y - x = 0$ y si $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

8. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange resolver los siguientes problemas :
   a) Determinar la distancia mínima del punto $P\,(2, 1, 1)$ al plano $x + y + z = 1$
   b) Calcular las dimensiones de una caja cilíndrica circular recta de volumen $V = 1000 \text{ cm}^3$ y de área superficial mínima.

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 10

TEMA: Integración Múltiple

- Integrales dobles
- Aplicaciones: áreas de regiones planas - volumen
- Cambio de variables: coordenadas polares
- Área de una superficie
- Integrales triples
- Cambio de variables en integrales triples: coordenadas cilíndricas y esféricas

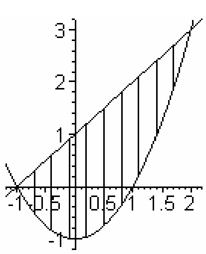
CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Métodos de integración
- Representación gráfica de regiones en el plano
- Representación gráfica de superficies

EJERCICIOS RESUELTOS

Para calcular $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ donde f(x,y) está definida en una región ***R*** del plano xy cerrada y acotada debemos determinar, ayudados por el gráfico de la región, un orden de integración adecuado y los límites de integración según el orden elegido.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x,y) = x+x^2y$ donde ***R*** es la región determinada por la recta y-x = 1 y la curva $y = x^2 - 1$ se quiere calcular $\iint_R f(x,y)\,dA$



Se observa que la región es de Tipo I, por lo que debemos encontrar los puntos de intersección entre la recta y la parábola resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

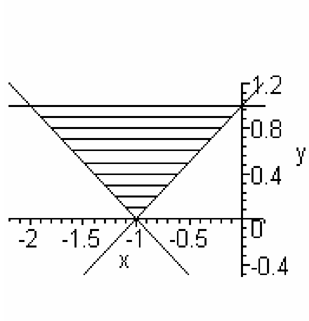
entonces $\boldsymbol{R} = \{(x,y): -1 \le x \le 2\ ,\ x^2 - 1 \le y \le x + 1\}$

$$\therefore \int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{x+1}(x + x^2 y)dydx = \int_{-1}^{2}(xy + x^2.\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2-1}^{x+1} dx =$$

$$\int_{-1}^{2}\left(x(x + 1) + x^2.\frac{(x + 1)^2}{2} - x(x^2 - 1) - x^2 \frac{(x^2 - 1)^2}{2}\right) dx =$$

$$\int_{-1}^{2}(x^2 + 2x + \frac{3x^4}{2} - \frac{x^6}{2})\ dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3x^5}{10} - \frac{x^7}{14}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{234}{35}$$

Ejemplo 2: Calcular $\iint_R f(x, y)dA$ siendo f(x,y) = 2x+y sobre la región ***R*** acotada por las gráficas de x+y+1 = 0 ; x-y+1 = 0 ; y = 1



De acuerdo con el gráfico de la región vemos que la misma conviene ser considerada como región de Tipo II donde:
R = {(x,y): 0 ≤ y ≤ 1 , -y-1 ≤ x ≤ y-1} y la integral se resuelve **cambiando el orden de integración**, integrando primero con respecto a x y luego con respecto a y

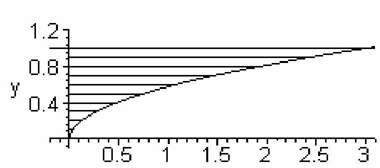
De otro modo habría que tomar a la región como unión de dos regiones de Tipo I ***R₁(R₂*** , lo que hace más trabajoso el cálculo.

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_0^1\int_{-y-1}^{y-1}(2x + y)dxdy = \int_0^1(x^2 + yx)\Big|_{-y-1}^{y-1} dy =$$

$$\int_0^1\left((y - 1)^2 + y(y - 1) - (-y - 1)^2 - y(-y - 1)\right)dy =$$

$$\int_0^1(2y^2 - 4y)dy = \frac{2y^3}{3} - 2y^2\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}$$

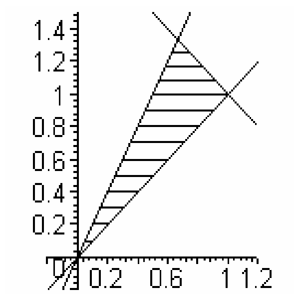
Ejemplo 3: Calcular $\iint_R f(x, y)dA$ donde f(x,y) = e^{y^3} y ***R*** es la región limitada por x= 0, y = 1, y = $\sqrt{\frac{x}{3}}$



Si bien la región puede ser considerada tanto de Tipo I como de Tipo II, la integral doble resulta imposible de resolver integrando primero con respecto a la variable "y" por lo que debemos cambiar el orden de integración:

$$\int_0^1\int_0^{3y^2} e^{y^3}\,dxdy = \int_0^1 x e^{y^3}\Big|_0^{3y^2} dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\,dy = e^{y^3}\Big|_0^1 = e-1$$

Ejemplo 4: Calcular el área de la región limitada por y = x , y = 2x , x + y = 2
por medio de una integral doble.



$$\boxed{A = \iint_R dA} \text{ y como } R = R_1 \cup R_2 \quad A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA =$$

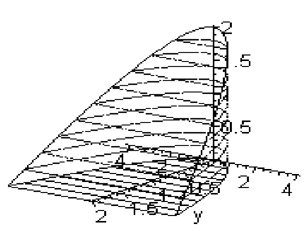
$$\int_0^{2/3}\int_x^{2x} dydx + \int_{2/3}^{1}\int_x^{2-x} dydx = 1/3$$

Ejemplo 5: Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones:
$y^2 = 8x$, $x + z = 2$, $z = 0$

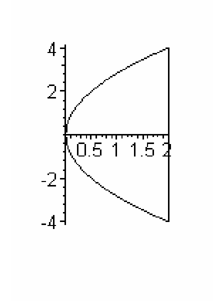
El cilindro $y^2 = 8x$ y el plano $x + z = 2$ determinan una curva la cual corta al plano xy en (2 , 4 , 0) y en (2 , -4 , 0).
Los planos $z = 0$ y $x + z = 2$ se cortan en la recta $x = 2$ y el sólido puede pensarse como el

conjunto de puntos del espacio: $\mathbf{V = \{ (x,y,z): (x,y) \in R_{xy} \wedge 0 \le z \le 2-x \}}$

donde $\mathbf{R_{xy} = \{ (x,y): -4 \le y \le 4 \wedge y^2/8 \le x \le 2 \}}$

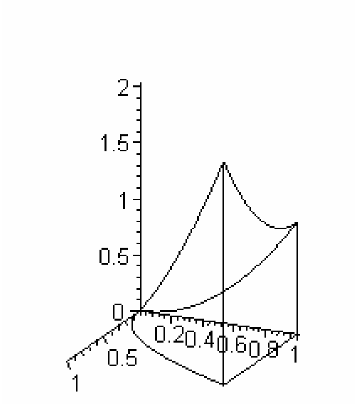


$\boldsymbol{R_{xy}}$

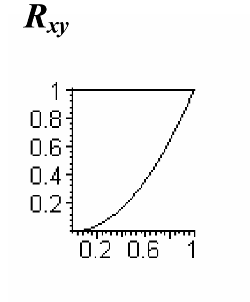


$$V = \int_{-4}^{4}\int_{\frac{y^2}{8}}^{2} (2-x)\,dxdy = \int_{-4}^{4}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{8}}^{2} dy = \int_{-4}^{4}\left(2-\frac{y^2}{4}+\frac{y^4}{128}\right)dy = 128/15$$

Ejemplo 6: Calcular el volumen bajo el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que se encuentra acotado por los planos z = 0 x = 0 y = 1 y el cilindro de ecuación $y = x^2$



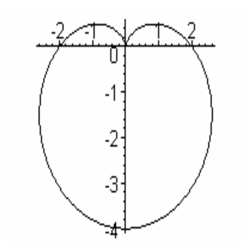
R_{xy}



A = $\int_0^1\int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)dydx = \int_0^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_{x^2}^{1} dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3})dx =$

$= (x^3/3 + x/3 - x^5/5 - x^7/21)\Big|_0^1 = 1/3+1/3-1/5-1/21 = 44/105$

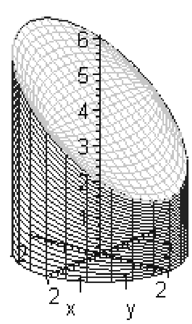
Ejemplo 7: Calcular el área interior a la curva de ecuación polar r = 2-2senθ



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\text{-}2\text{sen}\theta} r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2-2\cos\theta} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(2-2\cos\theta)^2}{2} d\theta = 6\pi$$ *verificar el resultado*

Ejemplo 8: Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$;
$z + y = 4$ y $z = 0$

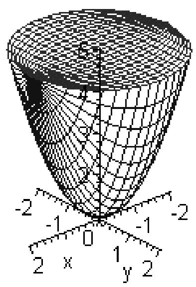


Utilizando coordenadas polares la integral doble resulta de fácil resolución ya que la región sobre el plano xy es el círculo centrado en el origen de radio 2 cuya ecuación polar es **r =2** con **0 ≤ 2 ≤ 2π**

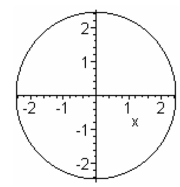
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4\text{-rsen}2)r\, drd2 = \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\text{sen}\theta\right)\Big|_0^2 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\text{sen}\theta\right)d\theta = [82 + (8\cos2)/3]\,\Big|_0^{2\pi} = 16\pi$$

Ejemplo 9: a) Calcular el área de la superficie de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ bajo el plano $z = 6$.
b) Calcular el área de la parte del plano $z = 6$ situada dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$



R_{xy}



a) Dado que el área es igual a: $\boxed{A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\; dA}$

y que la región del plano xy es el círculo centrado en el origen de radio √6, se obtiene:

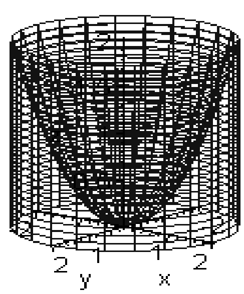
$A = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dydx$ pasando a coordenada polares resulta

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2+1}\; rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{6}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{31}{3} d\theta = \mathbf{62\pi/3}$$

b) En este caso, como lo que interesa es el área de una parte del plano, la función a considerar será $z = f(x, y) = 6$, la cual tiene derivadas parciales nulas y la integral doble, obviamente, dará como resultado **6π** , ¿por qué? Verifíquenlo.

Ejemplo 10: Calcular utilizando una integral triple y el sistema de coordenadas conveniente:
a) El volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 0$
b) El volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 3z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ para $z \geq 0$

a) Lo más conveniente es utilizar coordenadas cilíndricas:
la ecuación del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ se convierte en **r = 2** con $0 \leq 2 \leq 2\pi$ y $z \in \nabla$, la ecuación del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ en $\mathbf{z = r^2/2}$ con $0 \leq 2 \leq 2\pi$ y $r \geq 0$ => el sólido contiene todos los puntos del espacio:



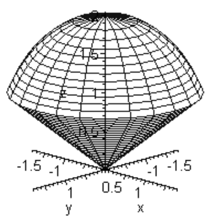
$\{(2,r,z)/\ \mathbf{0 \leq r \leq 2\ ,\ 0 \leq 2 \leq 2\pi\ ,\ 0 \leq z \leq r^2/2}\ \}$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2/2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} rz\Big|_0^{r^2/2} drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{r^3}{2}drd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{r^4}{8}\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2d\theta = 4\,\boldsymbol{\pi}$$

b) En coordenadas esféricas el cono tendrá ecuación $\varphi = \pi/3$ y la esfera $\Delta = 2$, la intersección entre ambas superficies es la curva de ecuación r(t) = cos(t)***i*** + sen(t)***j*** + 1***k*** => $0 \leq 2 \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$, $0 \leq \rho \leq 2$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2} \rho^2 \text{sen }\ \varphi d\Delta d\varphi d2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{\rho^3}{3}\text{sen }\varphi\Big|_0^2 d\varphi d2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{8}{3}\text{sen}\varphi d\varphi d2$$



$$= \int_0^{2\pi}\frac{8}{3}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/3} d2 = \int_0^{2\pi}\frac{4}{3}d2 = 8\pi/3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Graficar la región de integración y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^2\int_1^3 (x+2y)\,dydx$ **Rta**: 20 b) $\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dydx$ **Rta**: 1/3

c) $\int_0^1\int_y^{2y} (x+y)\,dxdy$ **Rta**: 5/6 d) $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{(x+y)}\,dxdy$ **Rta**: 8ln8-16+ e

2. Graficar la región de integración y cambiar el orden de integración

a) $\int_0^4\int_0^y f(x,y)\,dxdy$ b) $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dydx$

c) $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$ d) $\int_0^2\int_{e^x}^9 f(x,y)\,dydx$

3. Graficar la región de integración y, determinando un orden de integración adecuado, calcular la integral doble:

a) $f(x,y) = 3x+xy$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por $x+y=2$, $x+y^2=4$, $y=0$ **Rta:** 394/15

b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$ donde R es la región del primer cuadrante limitada por $y = x$, $y = \pi$, $x = 0$ **Rta:** 2

c) $f(x,y) = e^{y^3}$ donde R es la región limitada por $x = 0$, $y = 1$, $y = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$ **Rta:** e-1

d) $f(x,y) = xy$ donde R es la región limitada por $y = x$, $y = x/4$, $y = 1/x$ con $x \geq 0$ **Rta:** (ln2)/2

4. Calcular, utilizando integrales dobles, el área de la región limitada por las curvas:

a) $y = x^2$ $y = 8 - x^2$ **Rta:** 64/3

b) $x= -y^2$ $y = x + 2$ **Rta:** 9/2

c) $y= e^x$ $y = 0$ $x = 0$ $x = \ln 2$ **Rta:** 1

d) $y = x$ $y = 2x$ $x + y = 2$ **Rta:** 1/3

5. Calcular la **masa y el centro** de masa de una lámina delgada con función de densidad $\delta(x,y)$ cuya forma coincide con la región $\boldsymbol{R}$ del plano xy

a) $\delta(x,y) = 4$, $y = x^3$, $y = x^2$ **Rta:** $m = 1/3$ $\overline{X} = 3/5$ $\overline{Y} = 12/35$

b) $\delta(x,y) = y^2 + x + 1$, $x = y^2$, $x = 1$ **Rta:** $m = 12/5$ $\overline{X} = 41/63$ $\overline{Y} = 0$

c) $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$, $x = 1$, $y = 2x$ **Rta:** $m = 14$ $\overline{X} = 5/7$ $\overline{Y} = 11/14$

6. Calcular el **volumen** del sólido limitado por las superficies:

a) $x + y + z = 3$ y los planos coordenados en el primer octante **Rta:** 9/2
b) $x = 3$, $z = 4 - y^2$, y los planos coordenados en el 1º octante. **Rta:** 16
c) $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $x = 0$, $x + y = 2$, $z = 0$ **Rta:** 4/3
d) $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $z = x + 4$, $z = 0$ **Rta:**625/12
e) $z = x^2 + y^2$, $y = 4$, $y = x^2$, $z = 0$ **Rta:** 8576/105
f) $x + y + z = 3$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ **Rta:** 4/3
g) $x + y + z = 3$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
*(Resolverlo de dos formas distintas: **1º:** proyectando sobre el plano xz , **2º:** teniendo en cuenta los resultados de los incisos a) y f))* **Rta:** 19/6

7. Calcular utilizando **coordenadas polares**

a) El área de la región del plano xy determinada por:

a_1) La curva $r = 2\cos\theta$ **Rta: π**
a_2) Encerrada por la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ **Rta:** 4
a_3) Interior a la curva $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$ y exterior a $r = 1$, en el primer cuadrante
Rta: $\pi/9 + \sqrt{3}/6$

b) La integral doble:

b_1) $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$ **Rta:** $\pi/2$

b_2) $\int_{0}^{6} \int_{0}^{y} x\,dxdy$ **Rta:** 36

b_3) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1)dxdy$ **Rta:** $\pi(\ln 4 - 1)$

c) El volumen del sólido indicado:
c_1) Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, sobre el plano $z = 0$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ **Rta:** $81\pi/2$
c_2) Limitado por el paraboloide $y = 4 - x^2 - z^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $z = x$
Sugerencia: proyectar sobre el plano xz **Rta: π**

c_3) Debajo de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, sobre z = 0 y dentro de $x^2 + y^2 = 4$ **Rta:** 16 π /3

c_4) Debajo de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, sobre el plano xy , dentro de $x^2 + y^2 = 1/4$

Rta: (8-3 $\sqrt{3}$)/ π 12

8. Calcular el **área** de la superficie:

a) Porción del plano x + 3y + z = 6 en el primer octante. **Rta:** 6 $\sqrt{11}$

b) La porción de z = = 4- x^2- y^2 sobre el plano xy **Rta:** 36.177

c) La porción de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ debajo de z = 2 **Rta:** 4 $\sqrt{2}$ π

d) La porción de $z = x^2 + y^2$ entre y = x , y = 1 x = 0 **solo plantear la integral y, de ser posible, utilizar algún software para realizar el cálculo aproximado**

Rta: 0.931

e) La porción del plano y = 3x, interior al paraboloide $z = x^2 + y^2$, limitado por z = 4

Rta: 32/3

9. a) Plantear la **integral triple** $\iiint_Q f(x, y, z)dV$:

a_1) f(x,y,z) = $3y^2$ - 2z, donde Q es el tetraedro limitado por 3x + 2y - z = 6 y los planos coordenados**.(solo plantear)**

a_2) f(x,y,z) = 15, donde Q está limitado por 2x + 2y + z = 4, x = 4-y^2, x = 0 y z = 0

b) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies dadas utilizando integrales triples:

z = 1- y^2, z = 0, z = 4 - 2x, x = 4 (*Proyectar sobre el plano x = 0)* **Rta:** 44/15

c) Reescribir la integral iterada cambiando el orden de integración comenzando con una variable diferente a la dada:

c_1) $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} dxdzdy$ c_2) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$ c_3) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x^2+z^2}^4 dydxdz$

10. Utilizar **coordenadas cilíndricas** para evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} 3z^2 dzdydx$ **Rta**: 2 π /5

b) La integral que permite calcular el volumen del sólido limitado por
$x = y^2 + z^2$, x = 4 **Rta:** 8 π

c) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{x^2+z^2}(x^2+z^2)dydzdx$ **Rta:** 243π

11. Utilizar **coordenadas esféricas** para evaluar las siguientes integrales:

a) $\iiint\limits_Q e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dV$ donde Q está limitado por $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y por el plano xy

Rta: $2\pi(e^8-1)/3$

b) $\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ donde Q está limitada por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y por $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ **Rta:** $(2-2^{1/2})\pi$

c) $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dzdydx$ **Rta:** $(256-128\sqrt{2})\pi/3$

12. Utilizando una integral triple y un sistema de coordenadas apropiado, calcular:

a) $\iiint\limits_Q e^{x^2+y^2}dV$ donde Q es la región interior a $x^2+y^2=4$ entre $z=1$ y $z=2$

Rta: $\pi(e^4-1)$

b) $\iiint\limits_Q (x+z)\,dV$ donde Q es la región bajo $x+2y+3z=6$ en el primer octante

Rta: 12

c) $\iiint\limits_Q z\,dV$ donde Q es la región entre $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y $z=\sqrt{3}.\sqrt{x^2+y^2}$

Rta: π

d) $\iiint\limits_Q e^z dV$ donde Q es la parte interior a $x^2+y^2=9$ entre $z=x^2+y^2$ y $z=0$

Rta: $\pi(e^9-10)$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 11

TEMA: Campo Vectorial –Integral De Línea-Integral De Superficie

- Campos Vectoriales
- Divergencia y rotor
- Integrales de Línea -Aplicaciones
- Independencia de la trayectoria
- Teorema de Green- Aplicaciones al cálculo de áreas
- Superficies Parametricas
- Integrales de Superficie- Integrales de Flujo
- Teorema de Stokes- Teorema de Gauss (o de la divergencia)

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Vectores: representación gráfica - producto escalar y vectorial
- Parametrización de curvas
- Integración múltiple

EJERCICIOS RESUELTOS - INDICACIONES

- Se observa en este práctico que si bien el tema principal es **Campo Vectorial** en el ejercicio 3 se pide el cálculo de integrales de línea de **funciones escalares** de dos o tres variables, es decir: $\int fds = \int_0^L f(r(s))ds = \int_{t_1}^{t_2} f(r(t)).\|r(t)'\| \, dt$ donde r(t) es la ecuación vectorial parametrica de la curva (revisar práctico nº6) y **L** es la longitud del arco de curva en el intervalo $[t_1 ; t_2]$

¿Qué interpretación se le puede dar a una integral de este tipo en el caso que f sea una función escalar que toma valores positivos y represente la función de densidad lineal de masa de un hilo metálico representado por C?

- A partir del ejercicio nº 4 comienza el cálculo de integrales de línea de campos vectoriales:

  $\int_C \vec{F}\,dr = \int_C \vec{F}\,.\,\vec{T}\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(r(t)).r'(t)dt$ como $\vec{F}(r(t)) = \langle P(r(t);Q(r(t));R(r(t))\rangle$

  donde P; Q y R son las componentes del campo y $r'(t)dt = \langle x'(t)dt; y'(t)dt; z'(t)dt\rangle$, la forma práctica para resolver esta integral es

$$\boxed{\int_C Pdx + Qdy + Rdz}$$

- **Ejemplo:** $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ donde $r(t) = 3t\vec{i} + t^2\vec{j}$ para $0 \le t \le 1$

  $x(t) = 3t$ $dx = 3dt$; $y(t) = t^2$ $dy = 2tdt$

  $\int_C 2xdx + ydy = \int_0^1 2.3t.3dt + t^2.2tdt = \int_0^1 (18.t + 2.t^3)dt = 9t^2 + t^4/2 \Big|_0^1 = 19/2$

INDEPENDENCIA DEL CAMINO

- Cuando la integral de línea de un campo vectorial no depende de la trayectoria sino de los puntos extremos A y B del arco de curva, podemos resolver la misma de diferentes maneras:

> I. Tomando el camino más simple, por ejemplo un segmento que una a los puntos A y B
>
> II. Calculando la **función potencial** f correspondiente al campo -dado que éste es **conservativo-** y luego calcular f (B) – f(A)

- **Ejemplo:** Calcular $\int_C (y^2 + 1)dx + (2xy + 1)dy$ donde C es el arco de curva que une los puntos A(1,2) y B(3;-1)

Solución:

1º paso: se debe verificar que la integral es independiente del camino, caso contrario no se puede resolver dado que no contamos con la ecuación de la curva.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ como ambas derivadas parciales son iguales para todo punto del plano y éste es **simplemente conexo,** entonces se puede afirmar que la integral es independiente del camino.

2º paso: se puede optar por buscar la función potencial correspondiente al campo para calcular la integral.

f debe ser una función cuyo gradiente sea igual al campo: $\nabla f(x, y) = \vec{F}$ para todo punto de R^2 (*Ver ejercicio 3 del práctico 7)*

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = (y^2 + 1)\vec{i} + (2xy + 1)\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 1 \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 1 \quad (1)$$

entonces $f(x;y) = \int (y^2 + 1)\,dx = x\,y^2 + x + g(y) \qquad (2)$

derivando (2) respecto de y : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + g'(y)$ pero por (1) resulta $2xy + 1 = 2xy + g'(y)$

$\Longrightarrow g'(y) = 1$ con lo cual $g(y) = y + c$, de (2) resulta que:

$f(x;y) = x\,y^2 + x + y + c$ es **la función potencial** buscada

3º paso: el valor de la integral es

$$\int_C (y^2 + 1)dx + (2xy + 1)dy = f(3; -1) - f(1;2) = (5 + c) - (7 + c) = -2$$

Observación importante: rot($\vec{F}$) nulo en un conjunto D **simplemente conexo** implica independencia del camino para la integral sobre cualquier curva contenida en D, en consecuencia, **¡¡poner mucha atención en la solución del ejercicio nº 8!!**

TEOREMA DE GREEN

- **La importancia del teorema de Green es que vincula una integral de línea con una integral doble:**

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\ \mathbf{dr} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA}$$

- Para poder utilizar una integral doble aplicando el **teorema de Green** en el cálculo de una integral de línea en primer lugar hay que asegurarse que se cumplen las hipótesis del teorema. (*Cuales son??)*

- Inversamente, podemos calcular una integral doble usando una integral de línea.

- Una de las aplicaciones de este teorema es el **cálculo del área** de una región del plano mediante una integral de línea:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C -\,ydx \;+\; xdy \quad (1) \quad o \quad A = \oint_C xdy \quad (2) \quad o \quad A = -\oint_C ydx \quad (3)$$

donde C es la curva cerrada frontera de la región a la cual se le quiere calcular el área.

Cualquiera de las tres integrales proporcionan el valor del área de la región, en algunos casos la fórmula (2) puede resultar la más apropiada (en la (3) molesta el signo negativo) y en otros, cuando queremos calcular el área encerrada por una elipse por ejemplo, la (1) es la que conviene utilizar.

- Hay que tener en cuenta que la curva C se debe recorrer en sentido antihorario y que además C debe ser **cerrada simple regular a trozos**

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representar gráficamente algunos vectores de los siguientes campos vectoriales

a) $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ c) $\vec{F}(x,y,z) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + z\vec{k}$

2. Calcular el rotor y la divergencia de los siguientes campos vectoriales en los puntos indicados:

a) $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + xz^2\vec{j} + 3z\vec{k}$ en P(2,1,1)

b) $\vec{F}(x,y,z) = \text{sen}(yz)\vec{i} + 3\vec{j} + (2x+3z)\vec{k}$ en P(1 ,0 ,-2)

c) $\vec{F}(x,y,z) = 2e^{2x}\vec{i} + 3y\vec{j} + \vec{k}$ en P(0,2 ,3)

3. Calcular la integral de línea $\int_C f ds$:

a) $\int_C (x-y)\,ds$ C: $r(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j}$ $0 \le t \le 2$ **Rta: 10**

b) $\int_C 3x\,ds$ C : $x^2 + y^2 = 4$ desde (2,0) a (0,2) en sentido antihorario **Rta: 12**

c) $\int_C 3x\,ds$ C: segmento de recta que va de (0,0) a (1,0) seguido por el cuarto de circunferencia que llega hasta (0,1) **Rta: 9/2**

d) $\int_C (x^2+ y^2 + z^2)\,ds$ C : $r(t) = \text{sen}t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 8t\vec{k}$; $0 \le t \le \pi/2$

Rta: $\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{6}\pi(3+16\pi^2)}$

e) $\int_C 4z\,ds$ C : segmento de recta que va de A(1,0,1) a B(2,-2,2) **Rta :** $\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

4. Calcular la integral de línea $\int_C \vec{F}\,dr$ en cada caso:

a) $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ C : segmento de recta que une los puntos A(3,1) y B(5,4) **Rta: 31**

b) $\vec{F}(x,y,z) = (z;0\,;3\,x^2)$ C: r(t) = (2cost,3sent,1) desde (2,0,1) hasta (0,3,1) **Rta: -2**

c) $\int_C y^2\,dx + x^2\,dy + xyzdz$ C: segmento de recta que une los puntos (-1,0,0) y (1,0,0) **Rta: 0**

d) $\int_C y^2\,dx + x^2\,dy + xyzdz$ C: curva intersección el cilindro $y = x^2$ con el plano $z = 1$ desde (0,0,1) hasta (1,1,1) **Rta: 7/10**

5. Determinar, sin realizar los cálculos, el resultado de:

a) La integral del ejercicio 3.e) tomando la trayectoria desde B(2,-2,2) hasta A(1,0,1)

b) La integral del ejercicio 4.b) tomando la trayectoria desde (0,3,1) hasta (2,0,1)

6. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\vec{F}$ (x,y,z) = x$\vec{i}$ - z$\vec{j}$ + 2y$\vec{k}$ al mover un objeto a lo largo de la trayectoria cerrada C formada por los segmentos C_1: desde (0,0,0) hasta (1,1,0); C_2: desde (1,1,0) hasta (1,1,1) y C_3: desde (1,1,1) hasta (0,0,0) **Rta: 3/2**

7. En los siguientes ejercicios verificar que la integral de línea es independiente de la trayectoria sobre algún conjunto ***D*** contenido en ***R²*** o en ***R³***, según el caso, y evaluar mediante la correspondiente función potencial.

a) $\int_C 2xy\,dx + (x^2 - 1)dy$ C: trayectoria que une los puntos A(1,0) y B(3,1) **Rta: 8**

b) $\int_{(1,0)}^{(0,4)} ye^{xy}dx + (xe^{xy} - 2y)dy$ **Rta: -16**

c) $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ C: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ **Rta: 0**

d) $\int_{(2,1,3)}^{(4,-1,0)} (z^2 + 2xy)dx + x^2\,dy + 2xz\,dz$ **Rta: -38**

e) $\int_{(1,3,2)}^{(2,1,5)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$ **Rta:** $\sqrt{30} - \sqrt{14}$

f) $\int_C (2x\cos z - x^2)dx + (z - 2y)dy + (y - x^2 \operatorname{sen} z)dz$ C: cualquier curva cerrada de ***R³***

8. a)¿La integral del ejercicio 7. c) es independiente del camino sobre cualquier trayectoria de ***R²***?

b) Calcular la integral sobre la trayectoria cerrada C: $x^2 + y^2 = 1$

9. Resolver las integrales de línea de campos vectoriales sobre las trayectorias cerradas C utilizando el teorema de Green**-verificar previamente que se cumplen las hipótesis-**

a) $\oint_C (x^2 - y)dx + y^2\,dy$ C: $x^2 + y^2 = 1$ **Rta: *π***

b) $\oint_C (y^2+x)dx + (3x+2xy)dy$ C: $x^2 + y^2 = 4$ **Rta: 12 π**

c) $\oint_C (y^2+3x^2y)dx + (xy+x^3)dy$ C: formada por $y= x^2$; $y= 2x$ **Rta: -32/15**

d) $\oint_C (y\sec^2 x -2)dx + (\operatorname{tg} x -4y)dy$ C: formada por $x = 1- y^2$; $x= 0$ **Rta: 0**

10. a)¿Es posible aplicar el teorema de Green para calcular la integral del ejercicio 7.c)? Justificar

b) ¿Si la curva es C: $x^2 + y^2 = 4$? Justificar

c) ¿ Es posible aplicar el teorema para calcular $\oint_C (yx -2)dx + (\operatorname{tg} x -4y)dy$ donde C: $x= 2 - y^2$; $x = 0$? Justificar

11. Calcular el área de la región utilizando una integral de línea:

a) Región encerrada por la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ **Rta: 8 π**

b) Región limitada por $y = x^2$; $y =2x$ **Rta: 4/3**

c) Región limitada por la curva de ecuación $r(t) = \cos^3 t\, \vec{i} + \operatorname{sen}^3 t\, \vec{j}$ **Rta: 3π/8**

d) Región limitada por $y = x^2$; $y = 4$ **Rta: 32 /3**

12. Parametrizar las siguientes superficies:

a) Cilindro $x^2 + y^2 = 25$ acotado por los planos $z = 0$ y $z +y = 6$

b) Cono $x^2+ y^2 - z^2 = 0$ acotado por los planos $z = 0$ y $z = 4$

c) Paraboloide $z = x^2+ y^2$ limitado por $z = 9$

d) Parte de la esfera $x^2+ y^2 + z^2 = 16$ en el interior del cono $x^2+ y^2 - z^2 = 0$ con $z \geq 0$

13. Identificar y dibujar las superficies:

a) $r(u ;v) = 2\cos u\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$ $0 \leq v \leq 4$, $0 \leq u \leq 2\pi$

b) $r(u ;v) = \cos u\,\vec{i} + \operatorname{sen} u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$ $0 \leq v \leq 4 - \cos u - \operatorname{sen} u$, $0 \leq u \leq 2\pi$

c) $r(u ;v) = v.\cos u\,\vec{i} + v.\operatorname{sen} u\,\vec{j} + v^2\,\vec{k}$ $\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6}$, $0 \leq u \leq 2\pi$

d) $r(u ;v) = 2.\operatorname{sen}v.\cos u\,\vec{i} + 2.\operatorname{sen}v.\operatorname{sen} u\,\vec{j} + 2.\cos v\,\vec{k}$ $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq u \leq 2\pi$

14. Calcular el área de las siguientes superficies:

a) $r(u ;v) = 2\cos u\,\vec{i} + 2\operatorname{sen} u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$ con $0 \leq v \leq 4 - 2\operatorname{sen} u$, $0 \leq u \leq 2\pi$ **Rta: 16π**

b) Superficie del ejercicio 13. c) **Rta: 49π/3**

c) Superficie del ejercicio 13. d) **Rta: 16π**

15. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)dS$:

a) f (x,y,z) = z sobre el cilindro y = z^2 ; $0 \le x \le 3$; $0 \le z \le 2$ **Rta: $(17^{3/2} - 1)/4$**

b) f (x,y,z) = z^2 sobre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \ge 0$ **Rta: 2π/3**

c) f (x,y,z) = x + y + z sobre $x^2 + y^2 = 1$; $1 \le z \le 2$ **Rta: 3π**

16. Calcular la integral de flujo $\iint_S \vec{F}(x,y,z).\vec{n}dS$:

a) $\vec{F}$(x,y,z) = (y,-x,1) , sobre $z = x^2 + y^2$ con $z \le 4$ **($\vec{n}$ hacia abajo)** **Rta: - 4π**

b) $\vec{F}$(x,y,z) = (y,-x,z), sobre $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 3$ **($\vec{n}$ hacia abajo)** **Rta: - 18π**

c) $\vec{F}$(x,y,z) = (xy, y^2,z) sobre la superficie cerrada formada por las caras del cubo:
$0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$; $0 \le z \le 1$ **($\vec{n}$ hacia el exterior)** **Rta: 5/2**

17. Aplicar el teorema de la divergencia (Gauss) para calcular el flujo de $\vec{F}$ hacia el exterior a través de la frontera de V

a) $\vec{F}$(x,y,z) = (y – x) $\vec{i}$ + (z – y) $\vec{j}$ + (y – x) $\vec{k}$ V es el cubo limitado por:
$1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$; $-1 \le z \le 1$ **Rta: -16**

b) $\vec{F}$(x,y,z) = $x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ V es el cubo limitado por: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$;
$0 \le z \le 1$ **Rta: 3**

c) $\vec{F}$(x,y,z) = $x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$, V es el sólido limitado por $x^2 + y^2 \le 4$; z = 0 ; z = 1
Rta: 4π

18. Aplicar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\oint_C \vec{F}\, dr$

a) $\vec{F}$(x,y,z) = $(x^2 e^x - y)\,\vec{i} + (y^2 + 1)^{1/2}\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$ **($\vec{n}$ hacia arriba en el plano)**

C: $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$ **Rta: 4π**

b) $\vec{F}$(x,y,z) = $x^2\,\vec{i} + (y^4 - x)\,\vec{j} + z^2\,\text{seny}\,\vec{k}$ **($\vec{n}$ hacia arriba en el plano)**

C: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$ **Rta: - 4π**

19. Aplicar el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}.\vec{n}dS$

a) $\vec{F}(x,y,z) = (zx, 2y^2, z^3)$ S es la porción de $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy **($\vec{n}$ hacia arriba)** **Rta: 0**

b) $\vec{F}(x,y,z) = (zx^2 , z e^{x\ y2} - x , x\ln y^2)$ S es la porción de $z = 1 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy **($\vec{n}$ hacia arriba)** **Rta: - π**

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 12

TEMA:

- Sucesiones
- Series Numéricas

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Cálculo de límite
- Derivación e integración

1. a) Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones:

I. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ II. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

b) Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

I. $\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{2}{3}\ ,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5}\ ,\ \dfrac{5}{6}.....$ II. $-1\ ,\ \dfrac{2}{3}\ ,\ -\dfrac{3}{5}\ ,\ \dfrac{4}{7}\ ,\ -\dfrac{5}{9}.....$

2. Considerando las sucesiones del ejercicio 1
a) Representar cada una en un eje real
b) Determinar su convergencia o divergencia

3. Encontrar el término general de la sucesión de sumas parciales S_n.
Determinar si la serie converge o diverge y, si es posible, hallar su suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

4. Calcular el limite del término general a_n , ¿ qué se puede decir sobre la convergencia de la serie?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{1-2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{6n+1}$ c) $3+\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{3}+\dfrac{9}{4}+....$

5. Calcular la suma, cuando exista, de las siguientes series geométricas.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{24}+......$

6. Aplicando el criterio de la integral analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

7. Determinar en cada caso si la serie converge o diverge aplicando el criterio de comparación:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n + 1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3}$

8. Determinar en cada caso si la serie converge o diverge aplicando el criterio del cociente o el de la raíz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2n}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

9. Determinar cuales de las siguientes series alternadas son convergentes y cuales divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{2n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2n}$

10. Determinar cuales de las siguientes series son absolutamente convergentes, cuales condicionalmente convergentes y cuales divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(1+2n)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

11. Determinar la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10^n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{10n+1}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5}$

12. Expresar como número racional utilizando una serie geométrica al número 0,414141….

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TRABAJO PRÁCTICO Nº 13

TEMA:

- Series de potencias
- Serie de Taylor
- Serie de Mac Laurin

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- Cálculo de límite
- Derivación e integración

1. Determinar el intervalo de convergencia para cada una de las siguientes series de potencias:

a) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.....$ b) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$

2. Idem para las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n+6}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

3. Si se sabe que $\sum a_n x^n$ converge par x = 9 y diverge para x = -12, ¿es posible sacar conclusiones sobre:

a) la convergencia en x = -7?
b) la convergencia absoluta en x = 9?
c) la convergencia en x = -9?
d) la divergencia en x = 10?
e) la divergencia en x = -15?
f) la divergencia en x = 15?

4. a) Determinar la función que define la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

b) Hallar las funciones que se obtienen al reemplazar en la serie anterior x por:
I) $-x$ II) x^2 III) $2x$

5. Dadas las siguientes series de potencias hallar:
   I) el radio de convergencia y el dominio de la función que define la serie dada
   II) la serie de potencias que define a la función f ´ y el dominio de f ´

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3n^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

6. Escribir la serie de Mac Laurin para cada una de las siguientes funciones:
   a) e^x b) cos x c) sen x

7. Desarrollar en serie de Taylor cada una de las siguientes funciones:
   a) cos x en $x = \pi / 6$ b) $1/x$ en $x = 1$

8. Representar por medio de una serie de potencias:
   a) $\int_0^x e^{-t^2} dt$ b) arctg x c) ln(x+1)

9. Calcular con dos cifras decimales significativas, el valor de ln(3/2)

10. Deducir las fórmulas de Euler:
    a) $\text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ b) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$