Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional La Plata

Seminario Universitario de Ingreso - S.U.I.

Matemática

Teoría

Año 2019

ingreso@frlp.utn.edu.ar

S.U.I. La Plata 2019

SUI - UTN FRLP

Conjuntos

Se denomina conjunto a una colección de elementos que poseen una característica común.

Se llama elemento a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto. Estos tienen carácter individual, tienen cualidades que permiten diferenciarlos y cada uno de ellos es único, no habiendo elementos repetidos.

Se puede establecer la relación de pertenencia entre un elemento y un conjunto.

- Si un elemento se encuentra dentro de un conjunto se dice que *pertenece* a dicho conjunto, simbólicamente $\in$
- Si un elemento no se encuentra en un conjunto se dice que *no pertenece* a dicho conjunto, simbólicamente $\notin$

Determinación de un conjunto

Un conjunto se puede expresar de dos maneras: por extensión y por compresión.

Por extensión: Un conjunto es expresado por extensión cuando se enumeran todos sus elementos que lo conforman.

Por ejemplo:

- El conjunto de los colores primarios: $A = \{azul, rojo, amarillo\}$
- El conjunto de las vocales: $B = \{a, e, i, o, u\}$

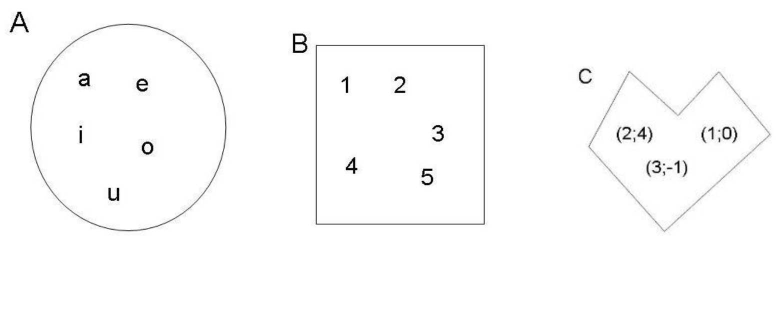
Por compresión: Un conjunto es expresado por compresión cuando se enuncia una propiedad que verifican todos sus elementos

Por ejemplo:

- B = {x/x es una vocal del abecedario}
- D = {x/x son los días de la semana}

Diagrama de Venn

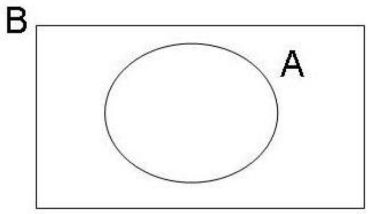
Los diagramas de Venn, que se deben al filósofo inglés John Venn (1834-1883), sirven para representar conjuntos de manera gráfica usando curva cerradas.



Relaciones entre conjuntos

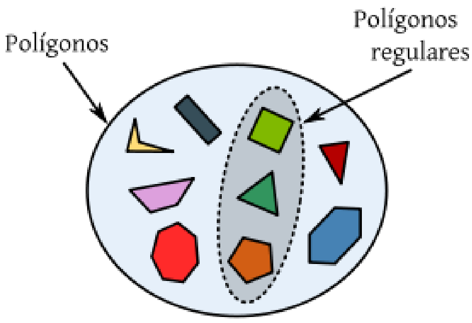
Inclusión:

Un conjunto A esta incluido en otro B, si y solo sí, todo elemento de A pertenece a B.



Notación: $\mathbf{A \subset B}$
A está incluido en B.
A es subconjunto de B.
A está contenido en B.

Ejemplo: El conjunto de los polígonos regulares está incluido en el conjunto de los polígonos.



Igualdad de conjuntos:

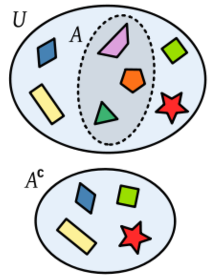
Dos conjuntos A y B son iguales si todo elemento de A también pertenece a B y recíprocamente.
Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Conjuntos Disjuntos:

Dos conjuntos son disjuntos cuando no tienen elementos comunes.

> ***Definiciones***
> ***Conjunto Vacío:*** *Es un conjunto que no tiene elemento. También se lo llama conjunto nulo. Ningún elemento le pertenece. Se lo representa simbólicamente con* $\varnothing$ *o* $\{\ \}$.
>
> ***Conjunto universal:*** *Es un conjunto no vacío tal que todos los conjuntos son subconjuntos de él. Simbólicamente U.*
>
> Observación: Todo conjunto incluye al $\varnothing$ como subconjunto

Complemento de un conjunto:



Dado un conjunto universal U y un conjunto A, se llama complemento de A al conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen al conjunto A.

Simbólicamente: A' o A^c
$A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$

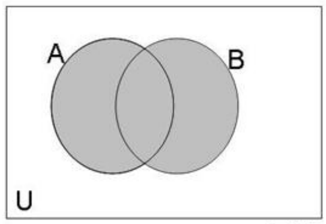
Observación:

$$U^c = \{\ \} \qquad\qquad \{\ \}^c = U$$

Operaciones entre conjuntos

Unión de conjuntos: El conjunto "A unión B" que se representa "**A U B**" es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, o a B o a ambos conjuntos.

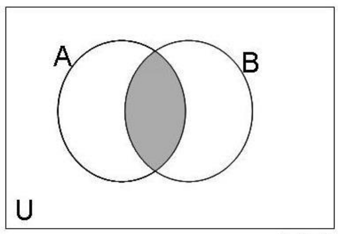
$A \cup B = \{x / x \in A \ \vee x \in B\}$



A U B

Intersección de conjuntos: El conjunto "A intersección B" que se representa "**A ∩ B**" es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

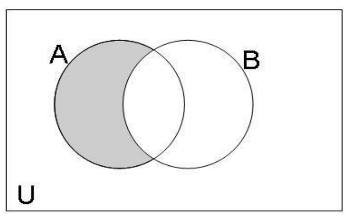
$A \cap B = \{x / x \in B \wedge x \in A\}$



A ∩ B

Diferencia de Conjuntos: El conjunto "A menos B" que se representa "**A - B**" es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

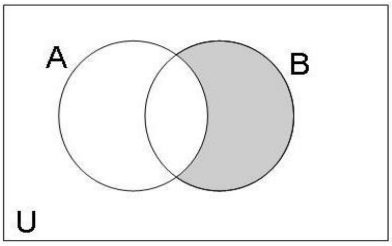
$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$



A - B

El conjunto "B menos A" que se representa "B - A" es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A.

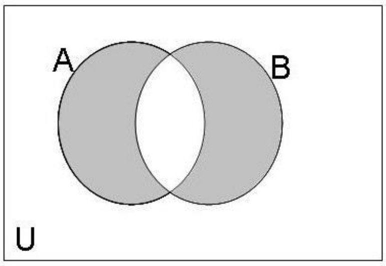
$B - A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}$



B - A

<u>Diferencia simétrica:</u> El conjunto "A diferencia simétrica B" que se representa "**A Δ B**" es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos simultáneamente.

$A \Delta B = \{x / x \in (A-B) \vee x \in (B-A)\}$



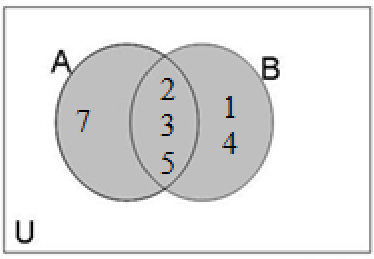
A Δ B

Ejemplo:

A= {x/x es primo y menor que 10}

B= {1,2,3,4,5}

- AUB= {1,2,3,4,5,7}
- A∩B= {2,3,5}
- A-B={7}
- B-A={1,4}
- AΔB={1,4,7}



Números naturales

El nombre surge por el proceso natural del hombre de contar o enumerar elementos u objetos de un conjunto. El conjunto de los números naturales se denota **N.**

Se caracteriza por tener primer elemento (1) y no tener último elemento.

N cuentan con infinitos elementos, por lo que no resulta posible expresarlo por extensión. Haciendo abuso de la notación se puede escribir:

$$N = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

Si al conjunto de los números naturales se le agrega el número cero (0), este nuevo conjunto recibe el nombre de **Naturales Ampliado y** se denota con el símbolo $\mathbf{N_O}$.

$$N_O = N \cup \{0\} = \{0,1,2,3,4,5,\ldots.\}$$

Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los puntos de una recta numérica.

Para ello se debe definir:

- Origen
- Sentido
- Segmento unidad

Una representación gráfica de $\mathbf{N_O}$ en la recta numérica, se muestra en la Fig.(1).

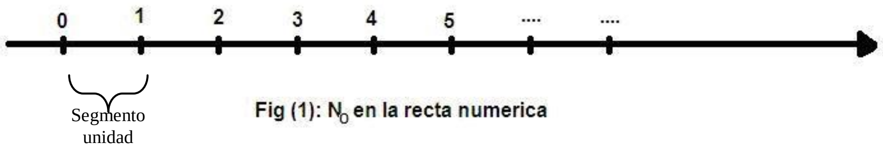


Fig (1): N_O en la recta numerica

Observación: En los números naturales las operaciones de adición y producto cumplen la *Ley interna*, ya que el resultado de estas operaciones entre números naturales es también un número natural.

Operaciones y propiedades en $\mathbf{N_0}$

Adición en $\mathbf{N_0}$

- Ley de cierre: Si $a \wedge b \in N_0 : a + b \in N_0$
- Propiedad asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Elemento Neutro: $a + 0 = 0 + a = a$
- Cancelativa: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$
- Uniforme: Si $a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d$
- Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$

Sustracción en $\mathbf{N_0}$

La sustracción no cumple la ley interna de N_0, pues la diferencia de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el sustraendo es mayor que el minuendo). Ejemplo. $2-5 \notin N_0$

- Cancelativa: $a-c=b-c \Rightarrow a=b$
- Uniforme: Si $a=b \wedge c=d \Rightarrow a-c=b-d$

Producto en $\mathbf{N_0}$

- Ley de cierre: Si $a \wedge b \in N_0 : a.b \in N_0$
- Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento Neutro: $a.1=1.a=a$
- Cancelativa: $a.c=b.c \Rightarrow a=b$
- Uniforme: Si $a=b \wedge c=d \Rightarrow a.c=b.d$
- Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Propiedad distributiva: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $a.(b-c)=a.b-a.c$

Cociente en $\mathbf{N_0}$

La división, no es una operación interna en N_0, pues el cociente de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el dividendo no es múltiplo del divisor). Ejemplo: $3:5 \notin N_0$

- Uniforme: Si $a=b \wedge c=d \Rightarrow a:c=b:d$
- Cancelativa: $a:c=b:c \Rightarrow a=b$
- Propiedad distributiva: $(a+b):c=a:c+b:c$
  $(a-b):c=a:c-b:c$

Números primos

En el conjunto de los números naturales, un número primo (distinto de 1) es aquel que tiene sólo dos divisores: el mismo número y el 1. El conjunto de los números primos tiene infinitos elementos.

$$\{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$$

Máximo común divisor (MCD)

El MCD de dos o más números naturales es el mayor número natural que los divide.

Para calcularlo, factorizamos los números es decir, se genera la descomposición como producto de factores primos.

El MCD es el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Si el MCD entre los números es 1, los mismos son números coprimos.

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mcm de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos.

Para calcularlo, factorizamos los números (descomposición en factores primos).

El mcm es el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplos:

Calcular el MCD y el mcm entre 72 y 50:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$MCD\ (72;50) = 2$$

$$mcm\ (72;50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad 20 = 2.5^2$$

Calcular el MCD y el mcm entre 8 y 52:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2^3 \qquad 52 = 2^2.13$$

$$MCD\ (8;52) = 2^2 = 4$$

$$mcm\ (8;52) = 2^3 \cdot 13 = 104$$

Números enteros

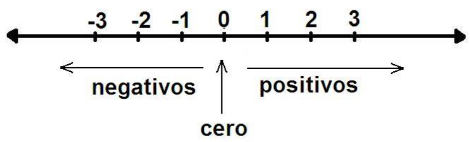
La necesidad de resolver operaciones de sustracción en el conjunto N_0, en las cuales *el minuendo es menor que el sustraendo,* dio origen a la creación de un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números enteros (Z). Este conjunto carece de primer y último elemento. Tiene ∞ elementos.

Para formar el conjunto Z se define para cada $n \in N$, -n considerado el opuesto de n.

Haciendo un abuso de la notación se puede escribir al conjunto Z de la siguiente manera:

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$
$$Z = -N \cup \{0\} \cup N$$
$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ \qquad \text{Donde } Z^- = -N = \{-n / n \in N\}$$
$$Z = Z^- \cup Z_0^{\,+}$$

Se representan en la recta numérica como indica el siguiente gráfico:



Observación: Entre dos números enteros existe una cantidad finita de números enteros.

Operaciones y propiedades de los números enteros

Se definen las mismas operaciones para el conjunto de números enteros vistas en N_0 y se conservan las propiedades establecidas en dicho conjunto.

Debemos tener en cuenta algunas reglas operatorias, como ser:

Reglas de los signos:

$$+ \cdot + = + \qquad + : + = +$$
$$+ \cdot - = - \qquad + : - = -$$
$$- \cdot - = + \qquad - : - = +$$
$$- \cdot + = - \qquad - : + = -$$

La división, no siempre es posible entre elementos del conjunto Z, esto hace interesante estudiar la noción y consecuencia de la divisibilidad.

Sean a, $d \in$ Z con $d \neq 0$. Se dice que *d* divide a *a* (o que a es divisible por *d*, o que a es múltiplo de *d*) si existe un elemento k $\in$ Z tal que $\boldsymbol{a = kd}$, (o sea que el cociente a/d es un número entero).

$$\frac{a}{d} = k \Leftrightarrow a = K.d$$

Se debe tener un especial cuidado el papel que desempeña el cero en la divisibilidad:

Si el valor de *d=0,* la expresión $\frac{a}{0}$, cuando $a \neq 0$, carece de sentido, porque ningún número multiplicado por 0 podría dar como resultado a.

Tampoco tiene sentido $\frac{0}{0}$, ya que cualquier número da como resultado 0 al ser multiplicado por 0. Falta de unicidad en el resultado, por lo tanto es indeterminado.

Potencia en *Z*

Base	**Exponente**	**Signo del resultado**
+	Par	+
	Impar	+
-	Par	+
	Impar	-

Radicación en Z

Índice	**Radicando**	**Signo del resultado**
Par	+	±
	-	No tiene solución
Impar	+	+
	-	-

Con índice impar, la raíz resultará un número positivo o negativo, cuando el radicando sea positivo o negativo, respectivamente:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[3]{-27} = -3$$

Con índice par, si el radicando es positivo, la operación tiene doble solución.
Ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \text{ ya que } 2^2 = 4 \; y \; (-2)^2 = 4$$

Las raíces de base negativa e índice par, no tiene solución en **Z**, ya que ningún número entero elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número entero k se define:

$$|k| = \begin{cases} k & si \; k \geq 0 \\ -k & si \; k < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|5| = 5 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0$

El resultado es un número positivo.

Propiedades del valor absoluto

1) $|a| = |-a|$
2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3) $|a + b| \leq |a| + |b|$
4) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Números racionales

Es el conjunto cuyos elementos se pueden expresar como cociente de dos números enteros. El conjunto de los números racionales se designa con "Q".

Q se expresa simbólicamente de la siguiente manera:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \wedge b \in Z - \{0\} \right\}$$

Es frecuente utilizar los números fraccionarios expresados como números decimales:

$\frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \frac{1000}{729} = 1{,}3717421148..........$

$\frac{11}{8} = 1{,}375$

En los números racionales, si en la expresión como número decimal se observa la presencia, en la parte decimal, de cifras que se repiten indefinidamente a partir de cierto orden, estas cifras reciben el nombre de período.

$\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}\widehat{3}$

Periódico puro

$\frac{2}{15}=0{,}1333...=0{,}1\widehat{3}$

Periódico mixto

Un número decimal periódico puede escribirse como cociente entre números enteros.

Esto tiene importancia para la representación de los números racionales sobre la recta numérica, ya que la ubicación de un número racional sobre la misma podrá efectuarse con mayor facilidad y precisión.

Por ejemplo:

<u>Periódico puro</u>

$1,\widehat{3}=$1,333…

X= 1,333..

10.X= 13,333…

Restamos miembro a miembro

-9.X = -12

X=-12/(-9)

X= 4/3

Luego:

1,333… = 4/3

<u>Periódico Mixto</u>

$15{,}3\widehat{1}=$15,3111…

X= 15,3111..

100.X=1531,111…

10.X= 153,111…

Restamos miembro a miembro

90.X = 1378

X=1378/90

X= 689/45

Luego:

15,3111…= 689/45

<u>Observaciones:</u>

- En Q existe el inverso multiplicativo: dado un número racional a, $a \neq 0$, existe otro racional $\frac{1}{a}$ que al multiplicarlos da como resultado el neutro del producto, el 1.

$$a.\frac{1}{a}=1$$

- $\frac{1}{a}$ es el recíproco de a.
- Entre dos números racionales existen infinitos números racionales. Por tal motivo, Q es un conjunto denso.

Números reales

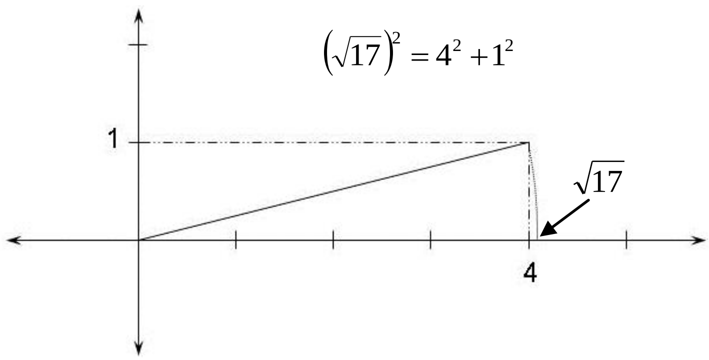
Si un número posee infinitas cifras decimales no periódicas, no puede escribirse como un cociente entre números enteros, es decir, no es un Número Racional. Estos números reciben el nombre de *Números Irracionales (I)*

Existen infinitos números irracionales, algunos de ellos son:

- La diagonal del cuadrado de lado 1: $\sqrt{2}$
- El número *e*, presente en muchos modelos matemáticos de procesos naturales.
- La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio: π

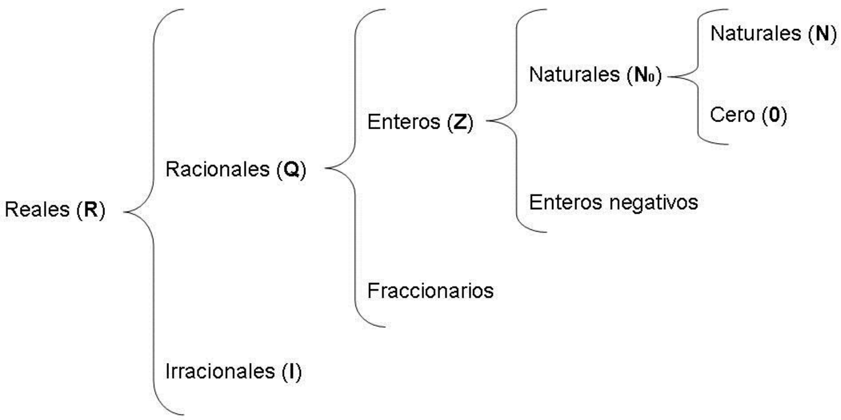
Si un número irracional es radical cuadrático o una combinación de ellos, se puede representar construyendo triángulos rectángulos (se utiliza el teorema de Pitágoras donde la hipotenusa es el número a representar).

Por ejemplo, representamos: $\sqrt{17}$



El conjunto, formado por la unión de los números racionales (Q) y los irracionales (I), se llama conjunto de los **Números Reales** y se designa por **R**.

Se establece una relación biunívoca entre el conjunto **R** y los puntos de la recta numérica. Es decir, a cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente.



Operaciones y propiedades en R

Potenciación en R

En la operación **$a^n = b$**, en el cual **a** es la base, **n** el exponente y **b** la potencia, con la condición de que la base y el exponente no sean simultáneamente nulos, se verifican:

1. **Propiedad uniforme:** $a = b \Rightarrow a^n = b^n$
2. **Propiedad distributiva con respecto al producto y al cociente:**
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$
3. **Producto de potencias de igual base:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. **Cociente de potencias igual base:** $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. **Potencia de exponente nulo:** $a^n : a^n = \dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ **con** $a \neq 0$
6. **Potencia de una potencia:** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
7. **Potencia negativa:** $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
8. **Exponente fraccionario:** $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$
9. **Cuadrado de la suma o de la diferencia:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$
10. **Cubo de la suma o de la diferencia:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

Radicación en R

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- a es el radicando
- n es el índice, $n \geq 2$ y n∈N
- b es la raíz

Se verifican las siguientes propiedades:

1. **Propiedad uniforme:** $a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$
2. **Propiedad distributiva respecto del producto y el cociente:**
$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{(a : b)} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$
3. **Ley de simplificación:**

Si n es impar: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ $\qquad\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Si n es par: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = |a|$

4. Raíz de raíz.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$ Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$

5. Amplificación

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$ Ejemplo: $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3.4]{5^{2.4}} = \sqrt[12]{5^8}$

<u>Operaciones con radicales:</u>

<u>Extracción e introducción de factores de un radical:</u>

Extracción:

Tenemos que tener en cuenta que sólo se podrán extraer del radical aquellos factores cuyo exponente sea igual o mayor que el índice de la raíz.

- $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2.2^2.2} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2.2.\sqrt{2} = 4.\sqrt{2}$
- $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{81.x^6.y^5} = \sqrt[3]{3^4.x^6.y^5} = \sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{x^6}.\sqrt[3]{y^3}.\sqrt[3]{y^2} = 3.x^2.y.\sqrt[3]{3y^2}$

Introducción:

Es el proceso inverso a la extracción y para ello basta con hallar factores equivalentes que contengan el mismo índice del radical.

- $a \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{a^3.2}$
- $2^3 \cdot 3^3 \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4}.\sqrt[4]{\left(3^3\right)^4}.\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 6} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$

Adición y sustracción

Sólo pueden operarse términos que tengan radicales semejantes. Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

$3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -1\sqrt{5}$ $\qquad 2\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{b} + 3\sqrt{a}$

Producto y cociente

$\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{3.5} = \sqrt{15}$ $\qquad \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5:2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

Ejemplos de operaciones combinadas aplicando propiedad distributiva:

- $(\sqrt{5} + \sqrt{2}).\sqrt{5} = \sqrt{5^2} + \sqrt{10} = 5 + \sqrt{10}$

- $(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3^2} = 4-3=1$

Para multiplicar o dividir radicales con distinto índice, es necesario convertirlos a común índice. Encontrar un común índice es encontrar radicales que, siendo equivalentes a los dados, tengan un índice común.

Ejemplo 1:

$$\sqrt[10]{2}.\sqrt[3]{5}.\sqrt[5]{2} =$$

Se reduce a común índice: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{2}$

Una alternativa es buscar el **mcm** entre los índices 10, 3 y 5:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$mcm(10,3,5) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$$

$$\sqrt[10]{2} = \sqrt[30]{2^3} \qquad \sqrt[3]{5} = \sqrt[30]{5^{10}} \qquad \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^6}$$

$$\sqrt[10]{2}.\sqrt[3]{5}.\sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^3}.\sqrt[30]{5^{10}}.\sqrt[30]{2^6} = \sqrt[30]{2^9.5^{10}}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{5^4} : \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{5^4 : 2^3} = \sqrt[12]{\frac{625}{8}}$$

Racionalización de denominadores:

Se llama racionalización al procedimiento mediante el cual se logra convertir una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.

Se pueden presentar dos casos:

- Un término en el denominador

✓ $\dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5\cdot 2} = \dfrac{3}{10}\sqrt{2}$

✓ $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[5]{3}}\dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[5]{3^4}$

- Dos términos en el denominador

✓ $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2+\sqrt{5}}.\dfrac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \dfrac{3.(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}).(2-\sqrt{5})} = \dfrac{6-3\sqrt{5}}{4-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5^2}} =$

$$= \frac{6-3\sqrt{5}}{4-5} = \frac{6-3\sqrt{5}}{-1} = -6+3\sqrt{5}$$

✓ $$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{4.(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = 2.(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$$

Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de R que se pueden representar gráficamente en la recta numérica.

INTERVALOS FINITOS.

Definición: Dados dos números reales a y b, llamamos intervalo de extremos a y b al conjunto formado por todos aquellos números reales comprendidos entre a y b.

Si los extremos pertenecen o no al intervalo se distinguen:

a) Intervalo cerrado: Es aquel al cual pertenecen sus extremos.

Simbólicamente:

$$[a, b] = \{x / x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$$

Su representación gráfica es:

b) Intervalo abierto: Idéntico al anterior, pero a él no pertenecen los extremos.

Simbólicamente:

$$(a, b) = \{x / x \in R \wedge a < x < b\}$$

Su representación gráfica es:

c) Intervalos semiabiertos o semicerrados: Contienen solo uno de sus extremos.

c1) Abierto por izquierda y cerrado por derecha:

Simbólicamente:

$$(a, b] = \{x / x \in R \wedge a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica es:

c2) Cerrado por izquierda y abierto por derecha:

Simbólicamente:

$$[a, b) = \{x / x \in R \wedge a \leq x < b\}$$

Su representación gráfica es:

INTERVALOS INFINITOS.

Dado el intervalo $(-\infty, a]$, al mismo pertenecen todos los números reales menores o iguales que a.

$$(-\infty, a] = \{x / x \in R \ \wedge \ x \leq a\}$$

$-\infty$ se lee "menos infinito" y no simboliza un número real.

Su representación gráfica es:

La notación de intervalo permite utilizar una nueva simbología para el conjunto de los números reales.

$$R = (-\infty, +\infty)$$

Ejercicio: Recordando la definición de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

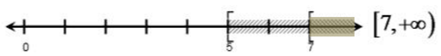
Hallar $|x-5| \geq 2$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & x-5 \geq 0 \quad \longleftarrow \text{Alternativa A} \\ -(x-5) & x-5 < 0 \quad \longleftarrow \text{Alternativa B} \end{cases}$$

Existen dos alternativas: $A \vee B$

Alternativa A

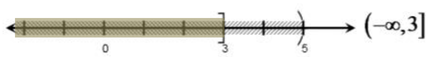
$$x-5 \geq 2 \wedge x-5 \geq 0$$
$$x \geq 2+5 \wedge x \geq 5$$
$$x \geq 7 \wedge x \geq 5$$



$\vee$

Alternativa B

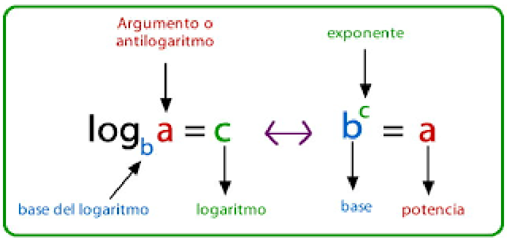
$$-(x-5) \geq 2 \wedge x-5 < 0$$
$$-x+5 \geq 2+5 \wedge x < 5$$
$$-x \geq 2-5 \wedge x < 5$$
$$-x \geq -3 \wedge x < 5$$
$$x \leq 3 \wedge x < 5$$



$$R^{ta} : (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$$

Logaritmo:

Logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el argumento. Definición:



$$a > 0 \quad b > 0 \quad b \neq 1$$

De la definición de logaritmo podemos decir:

- No existe el logaritmo de un número con base negativa
- No existe el logaritmo de un número negativo
- No existe el logaritmo de cero
- El logaritmo de 1 es cero $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo en base **a** de **a** es 1. $\log_a a = 1$

Propiedades de los logaritmos

- **Producto**

El logaritmo de un producto en una base dada, es igual a la suma de los logaritmos de los factores en esa misma base.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

- **División**

El logaritmo de un cociente en una base dada, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor en esa misma base.

$$\log_a (b : c) = \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- **Potencia**

El logaritmo de una potencia en una base dada es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Logaritmos decimales

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número 10.

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmo Neperiano o natural

Se llaman así a los logaritmos que tienen por base el numero **e**.

$$\log_e x = \ln x$$

Donde **e** es irracional y aproximadamente igual a 2.71828182845904523…

Cambio de bases

Se define al logaritmo de **x** en base **a** (suponiendo que **a**, **x** y **b** son números reales positivos y que tanto **a** como **b** son distintos de 1) de la siguiente manera

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Números Complejos

La resolución de ciertas ecuaciones en el campo de los números reales dio origen a los números complejos.

$$(x-1)^2+4=0$$
$$(x-1)^2=-4$$
$$x-1=\sqrt{-4}$$

La radicación de índice par y radicando negativo NO TIENEN SOLUCIÓN EN R

$\therefore$ *Resulta necesario ampliar el campo numérico.*

Definiendo el conjunto de los números complejos

$$x-1=\sqrt{4}.\sqrt{-1}$$
$$x-1=\pm 2.i$$
$$x=1\pm 2.i$$
$$x_1=1+2.i$$
$$x_2=1-2.i$$

$$\boxed{\sqrt{-1}=i}$$

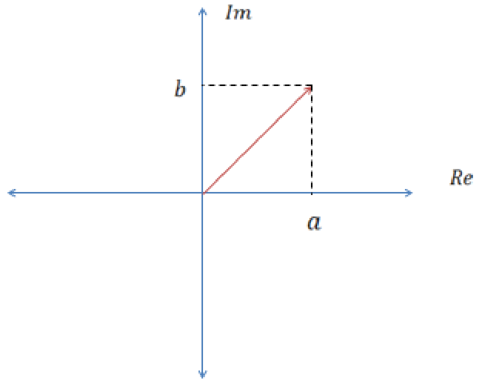
Un número complejo en la forma binómica se escribe $Z=a+bi$

La parte real de Z: $Re(Z)=a$

La parte imaginaria de Z: $Im(Z)=b$

Representación gráfica

$Z=a+bi$



Potencias sucesivas de i

$i^0=1$

$i^1=i$

$i^2=-1$

$i^3=i^2.i=-i$

$i^4=1$

$i^5=i$

$i^6=-1$

$i^7=-i$

Desde i^4 en adelante se repiten los valores

$$\begin{array}{l|l} a & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

Si el exponente es $a \in N$ efectuando la división por 4

$a=4.q+r \; con \; r<4$ $\qquad i^a=i^{4.q+r}=i^{4.q}.i^r=(i^4)^q.i^r=1.i^r=i^r$

Ejemplo:

$$i^{39}=i^{4.9+3}=(i^4)^9.i^3=i^3=-i$$

Adición

Sean $z_1=a+bi\ y\ Z_2=c+di$

$Z_1+Z_2=(a+c)+(b+d)i$

Ejemplo: $Z_1=2+3i$ $\quad Z_2=5-4i$ $\qquad Z_1+Z_2=2+3i+5-4i=7-i$

Sustracción

Sean $z_1=a+bi\ y\ Z_2=c+di$

$Z_1-Z_2=(a-c)+(b-d)i$

Ejemplo: $Z_1=2+3i$ $\quad Z_2=5-4i$ $\qquad Z_1-Z_2=2+3i-(5-4i)=-3+7i$

Producto

Sean $z_1=a+bi\ y\ Z_2=c+di$

$Z_1.Z_2=(a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=\ ac+adi+bci+bd.(-1)=ac+adi+bci-bd=(\boldsymbol{ac-db})+(\boldsymbol{ad+bc})\boldsymbol{i}$

Ejemplo: $Z_1=2+3i$ $\quad Z_2=5-4i$ $\qquad Z_1.Z_2=(2+3i).(5-4i)=10-8i+15i-12i^2=$
$=10-8i+15i+12=22+7i$

Conjugado

Sea $Z_1=a+bi$, se define $\overline{Z_1}$ al número complejo que conserva la misma componente real y posee la opuesta de la componente imaginaria, o sea, $\overline{Z_1}=a-bi$

Cociente

Sean

$z_1=a+bi\ y\ Z_2=c+di$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}.\frac{\boldsymbol{c-di}}{\boldsymbol{c-di}}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo: Sean $Z_1=2+4i$ y $Z_2=3-i$. Calcular $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2+4i}{3-i}.\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+2i+12i+4i^2}{9+3i-3i-i^2}=\frac{6+2i+12i-4}{9+1}=\frac{2+14i}{10}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$$

Polinomio de una sola variable

Sean $a_0; a_1; a_2; .....; a_n$ números reales y $n \in N_0$, llamaremos polinomio de la variable **x** a toda expresión algebraica entera de la forma: $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

Los polinomios se nombran con letras mayúsculas indicando la variable entre paréntesis. Ejemplo: P(x).

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

El polinomio será de grado **n** si el termino de mayor grado es $a_n x^n$ con $a_n \neq 0$.
A a_0 se lo llama termino independiente y su grado es 0.

A a_n se lo llama coeficiente principal del polinomio de grado n.

Ejemplos:

$P_{(x)} = 6x^4 + \frac{1}{3}x - 10$ es un polinomio de grado 4 y su coeficiente principal es 6.

$Q_{(x)} = -\frac{1}{3}x + 1$ es un polinomio de grado 1 y su coeficiente principal es $-\frac{1}{3}$.

$T_{(x)} = 4$ es un polinomio de grado 0 y su coeficiente principal es 4.

El polinomio $0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$ se lo llama polinomio nulo.

Operaciones con polinomios

Adición y sustracción de polinomios

La adición o sustracción entre polinomios da como resultado un nuevo polinomio.

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ dos polinomios, en estas operaciones el resultado se obtienen operando términos que compartan el mismo grado.

Ejemplo:

Sean: $P_{(x)} = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$ $\quad Q_{(x)} = x^4 + 3x^3 - 2x + 2$

Hallar

$P_{(x)} + Q_{(x)}$ $\qquad P_{(x)} - Q_{(x)}$

$$\begin{array}{rr} & 2x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ + & x^4 + 3x^3 - 2x + 2 \\ \hline & 3x^4 + 2x^3 + 0x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ - & x^4 + 3x^3 - 2x + 2 \\ \hline & x^4 - 4x^3 + 4x - 3 \end{array}$$

Polinomios iguales y opuestos

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

- Si al *sumarlos* se obtiene el polinomio nulo, entonces son polinomios *opuestos*
- Si al *restarlos* se obtiene el polinomio nulo, entonces son polinomios *iguales*.

Productos de polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios, el resultado es un polinomio y su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.

Para calcular el producto multiplicamos cada uno de los términos (monomios) de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio y operamos finalmente entre los términos de igual grado (monomios semejantes).

Ejemplo:

Sea $P_{(x)} = x^3 - 2x + 2$ $\qquad Q_{(x)} = x - 3$

$$P(x).Q(x) = (x^3 - 2x + 2).(x - 3) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 2x - 6 = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 8x - 6$$

División de polinomios

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, con $Q_{(x)} \neq 0$, existen únicos polinomios $C_{(x)}$ y $R_{(x)}$ tales que:

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$$

Siendo el grado de $R_{(x)}$ menor que el grado de $Q_{(x)}$.

$P_{(x)}$ recibe el nombre de dividendo, $Q_{(x)}$ el divisor, $C_{(x)}$ el de cociente y $R_{(x)}$ es de resto o residuo.

Los polinomios $C_{(x)}$ y $R_{(x)}$ se obtiene al efectuar la división de $P_{(x)}$ por $Q_{(x)}$ mediante el siguiente procedimiento:

a) Ordenar y completar los polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$.

b) Se divide el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor, el resultado es un sumando del cociente.

c) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor, y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un resto "parcial".

d) Si el grado del resto obtenido en el paso anterior es menor que el grado del divisor, se termina el procedimiento, en caso contrario, se repiten los pasos (b), (c) y (d), pero tomando como dividendo el resto obtenido en el paso anterior.

Ejemplo:

Sean $P_{(x)} = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 6x^3 - 1$ $\qquad Q_{(x)} = -3x + x^2 + 1$

Hallar $P_{(x)} : Q_{(x)}$

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 3x - 1 & \underline{|x^2 - 3x + 1} \\
-\;\underline{2x^4 - 6x^3 \;\; + 2x^2} & 2x^2 - 5 \\
0 + \;\; 0 - 5x^2 - 3x - 1 & \\
-\;\underline{-5x^2 + 15x - 5} & \\
0 \;\; -18x + 4 &
\end{array}
$$

El cociente es $C(x) = 2x^2 - 5$ y el resto es $R(x) = -18x + 4$

Se observa que el grado del cociente es la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el grado del polinomio divisor.

Cuando el resto es igual a cero (polinomio nulo) el cociente resulta exacto y en esas condiciones decimos que $P_{(x)}$ es divisible por $Q_{(x)}$, $Q_{(x)}$ es divisor de $P_{(x)}$ o $P_{(x)}$ es múltiplo de $Q_{(x)}$.

Raíces de un polinomios

Un número real a es raíz de un polinomio $P_{(x)}$, si $P_{(x)}$ se anula para $x = a$.

En símbolos: $x = a$ es raíz de $P_{(x)} \Leftrightarrow P_{(a)} = 0$

Ejemplo:

$P(x) = x^2 - 4x + 3$

$P(3) = 3^2 - 4.3 + 3 = 0$ 3 es raíz de P(x)

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento "abreviado" para determinar el cociente y el resto que se obtiene al dividir un polinomio $P_{(x)}$ por un polinomio de la forma $x - a$, con $a \in R$, a partir de los coeficientes de $P_{(x)}$ y el cero o raíz de $x - a$.

A través de un ejemplo se aplica la regla de Ruffini.

Sea $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ y $Q_{(x)} = x - 3$

a) Colocamos los coeficientes de $P_{(x)}$ (divisor), ordenado y completo, en una fila.

$$4 \quad 3 \quad -5 \quad 2$$

b) Se determina la raíz o cero de $Q_{(x)}$ (divisor). Con esta información generamos la siguientes estructura:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & \downarrow & & & \\ \hline & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & & 12 + & & \\ \hline \times & 4 & 15 & & \end{array}$$

c) Se repite el proceso y el último valor que se obtiene es el resto de la división.

$$\begin{array}{r|cccc l} & 4 & 3 & -5 & 2 & \Rightarrow coef.\,de\;P_{(x)} \\ Cero\;de\;Q_{(x)} \rightarrow \boxed{3} & & 12 & 45 & 120 & \\ \hline Coef.\,de\;C_{(x)} \Rightarrow & 4 & 15 & 40 & \boxed{122} & \rightarrow resto \end{array}$$

$C(x) = 4x^2 + 15x + 40$ $\qquad\qquad$ $R(x) = 122$

Como $P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$, entonces

$$(4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) = (x-3).(\;4x^2 + 15x + 40) + 122$$

<u>Teorema del resto</u>

Si se realiza la división de un polinomio $P_{(x)}$ por $(x-a)$, puede ocurrir que el resto sea nulo o de grado cero.

Por lo tanto: $\qquad P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$

Si $R_{(x)} = r$ y $Q_{(x)} = x - a$. Si $x = a$, reemplazando en la igualdad anterior.

$$P_{(a)} = (a-a) \cdot C_{(a)} + r \;\Rightarrow\; P_{(a)} = r$$

Se puede hallar el resto de la división, sin hacer el algoritmo de la operación, basta con hallar el valor de $P_{(x)}$ en $x = a$.

Ejemplo: Determinar el resto de dividir P(x) y Q(x)

$$P(x) = 4x^3 - 15x + 4 \qquad Q(x) = x + 2$$

$$P(-2) = 4(-2)^3 - 15.(-2) + 4 = -32 + 30 + 4 = 2$$

Por lo tanto, 2 es el resto de dividir P(x) y Q(x)

<u>Factorización de polinomios</u>

Representa expresar un polinomio como un producto.

a) **<u>Factor común:</u>**

Procedimiento

- ✓ Buscamos el factor o los factores comunes que se encuentren en todos los términos del polinomio.
- ✓ Se expresa el polinomio dado como el producto del factor común por el polinomio que resulta de dividir cada término del polinomio original por el factor común.

Ejemplos:

- $4x^6 + 8x^4 - 2x^2 = 2x^2.(2x^2 + 4x^2 - 1)$
- $15xy^2 - 20xy = 5xy.(3y - 4)$

b) <u>Factor común en grupo:</u>

Procedimiento:

- ✓ Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se sustrae dicho factor común en cada una de los grupos.
- ✓ Deben quedar términos con un paréntesis (factor) común.
- ✓ Se extrae dicho paréntesis como factor común.

Ejemplos:

- $P_{(x)} = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = \left(7x^5 - 5x^4\right) + \left(14x - 10\right) =$
  $= x^4\left(7x - 5\right) + 2\left(7x - 5\right) = \left(x^4 + 2\right)\left(7x - 5\right)$
- $2m + 2r - tm - tr = 2.(m + r) - t.(m + r) = (m + r).(2 - t)$

c) <u>Diferencia de cuadrados:</u>

Procedimiento:

- ✓ Se presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par.
- ✓ Se debe identificar la resta (debe haber un solo signo negativo) y los cuadrados perfectos.

✓ Calculo las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

✓ Transformo la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formado por dichas bases.

Ejemplos 1:

$$9x^2 - 25$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{9x^2} &= 3x \\ \sqrt{25} &= 5 \end{aligned}\right\} \textit{entonces } 9x^2 - 25 = (3x+5)(3x-5)$$

Ejemplos 2:

$$\frac{4}{9}x^6 - 81 = (\frac{2}{3}x^3 + 9).(\frac{2}{3}x^3 - 9)$$

d) <u>Trinomio cuadrado perfecto:</u>

Recordando que: $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$

Procedimiento:

✓ Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no pueden ser negativos.

✓ Se calcula el doble producto de las bases y se verifica que ese resultado se encuentre en el trinomio dado. Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces es un trinomio cuadrado perfecto.

✓ Se expresa como el cuadrado de un binomio.

Ejemplos:

- $$P_{(x)} = 4x^6 + \frac{1}{16} + x^3$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{4x^6} &= 2x^3 \\ \sqrt{1/16} &= \frac{1}{4} \\ 2 \cdot 2x^3 \cdot \frac{1}{4} &= x^3 \end{aligned}\right\} \textit{es un trinomio cuadrado perfecto}$$

$$\textit{Entonces}: P_{(x)} = 4x^6 + \frac{1}{16} + x^3 = \left(2x^3 + \frac{1}{4}\right)^2$$

- $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

e) <u>Cuatrinomio cubo perfecto</u>

Recordando que: $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Procedimiento:

✓ Se reconocen los cubos perfectos

✓ Calcular:

- El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda.
- El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda.

✓ Si estos cálculos son parte del cuatrinomio dado, entonces decimos que un cuatrinomio cubo perfecto, y luego se expresa como el cubo de un binomio.

Ejemplo:

$$P_{(x)} = 8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 27a^3$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{8x^3} = 2x \\ \sqrt[3]{-27a^3} = -3a \\ 3\cdot(2x)^2\cdot(-3a) = -36ax^2 \\ 3\cdot(2x)\cdot(-3a)^2 = 54xa^2 \end{array}\right\} \textit{es un cuatrinomio cubo perfecto}$$

$$Entonces: P_{(x)} = 8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 27a^3 = (2x-3a)^3$$

f) <u>Suma o resta de potencias de igual grado</u>

Se busca una raíz del polinomio y se factoriza utilizando la regla de Ruffini
Ejemplo:

$$P_{(x)} = x^5 + a^5$$

$-a$
Es raíz del polinomio P(x)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 \\ -a & & -a & a^2 & -a^3 & a^4 & -a^5 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & -a^3 & a^4 & 0 \end{array}$$

$$P_{(x)} = (x+a)\left(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4\right)$$

Ejemplo:

$x^3 - 8 = x^3 - 2^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 8 = (x-2).(x^2 + 2x + 4)$$

<u>Divisibilidad:</u>

En este caso consiste en hallar los divisores del polinomio dado. Esto lo efectuamos mediante la siguiente propiedad:

"Si un número a es raíz de un polinomio $P_{(x)}$, dicho polinomio es divisible por $(x-a)$, es decir, al dividir $P_{(x)}$ por $x-a$, el resto de la división es cero"

Por el teorema del resto tenemos que: $P_{(a)}=0$

$$\begin{array}{l|l} P_{(x)} & (x-a) \\ \cline{2-2} 0 & C_{(x)} \end{array}$$

$$P_{(x)}=(x-a)\cdot C_{(x)}$$

Este tipo de división la podemos realizar con la regla de Ruffini.

Cálculo de las raíces de un polinomio:

Para calcular las raíces de un polinomio se iguala a 0 la expresión y se resuelve la ecuación.

Ejemplos:

Sea $P_{(x)}=3x+1$

$$3x+1=0$$
$$x=\frac{1}{3}$$

$\therefore \frac{1}{3}$ es raíz de P(x)

$$3x+1=(x-\frac{1}{3}).3$$

Sea $P_{(x)}=2x^2-7x+3$

$$x_{1-2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2x^2-7x+3=0$$

$$x_{1-2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm 5}{4}$$

$$x_1=\frac{12}{4}=3$$
$$x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$2x^2-7x+3=(x-3).(x-\frac{1}{2}).2$$

<u>Expresiones algebraicas fraccionarias</u>

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, tal que $Q_{(x)}$ sea distinto del nulo, se denomina expresión algebraica fraccionaria a toda expresión de la forma: $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{x+x^2}=\frac{x+3}{x(1+x)} \qquad \forall x: x\neq 0 \wedge x\neq -1$$

Una expresión algebraica es irreducible si no existe en ella factores comunes en el numerador y el denominador.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias:

Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y denominador y simplificar los factores comunes presentes en ambos; de esta manera se obtiene una expresión irreducible equivalente a la original. El objetivo de simplificar, es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

Ejemplo:
$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x+3)}}=\frac{1}{(x+1)}$$

Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias:

Si las expresiones tienen igual denominador, se suman o se restan sus numeradores, según corresponda.

Para expresiones de distinto denominador, estas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador.

Este denominador (común) es el mcm de los denominadores de las expresiones.

Ejemplo:

$$-\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{-(x+1)+2\cdot 2-x\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-x-1+4-2x(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{-x+3-2x^2+2x}{2(x-1)(x+1)}=\frac{-2x^2+x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(x+1).(-2x+3)}{2.(x-1).(x+1)}=\frac{2.(-x+\frac{3}{2})}{2.(x-1)}=\frac{-x+\frac{3}{2}}{x-1}$$

$$\forall x: x\neq 1 \wedge x\neq -1$$

Multiplicación de expresiones algebraicas fraccionarias:

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas:

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}\cdot\frac{T_{(x)}}{S_{(x)}}=\frac{P_{(x)}\cdot T_{(x)}}{Q_{(x)}\cdot S_{(x)}}$$

Ejemplo:
$$\frac{x^2-4}{2x-2}.\frac{x-1}{4x+8}=\frac{(x-2).(x+2)}{2.(x-1)}.\frac{x-1}{4.(x+2)}=\frac{x-2}{8}$$

División de expresiones algebraicas fraccionarias:

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria que se obtiene multiplicando la primera expresión por la reciproca de la segunda:

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} : \frac{T_{(x)}}{S_{(x)}} = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \cdot \frac{S_{(x)}}{T_{(x)}}$$

Ejemplo:

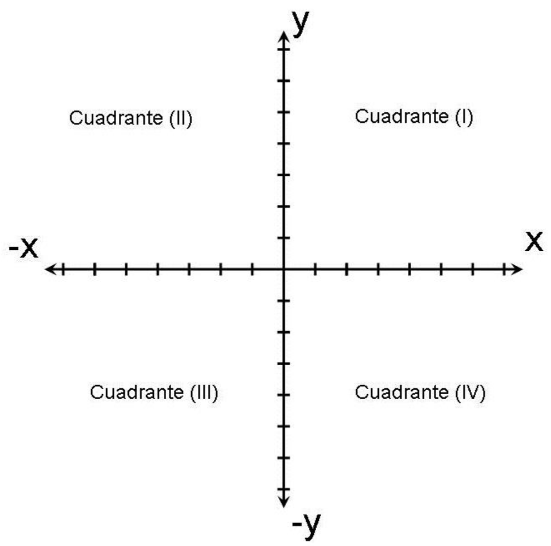
$$\frac{x^2-2x+1}{5x+10} : \frac{3x^2-3x}{2x^3-8x} = \frac{(x-1)^2}{5.(x+2)} : \frac{3x.(x-1)}{2x.(x^2-4)} = \frac{(x-1)^2}{5.(x+2)} : \frac{3x.(x-1)}{2x.(x-2).(x+2)} = \frac{2.(x-1).(x-2)}{15}$$

Sistema de coordenadas cartesianas

El sistema de coordenadas cartesianas (René Descartes) consta de dos ejes perpendiculares entre sí. La intersección entre los ejes determina el origen de coordenadas (O).

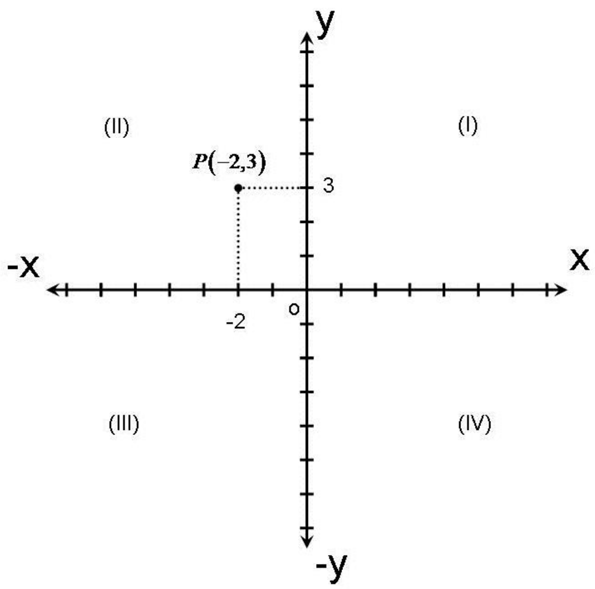
El eje horizontal se denomina eje de abscisas y el eje vertical se llama eje de ordenadas.

Estos ejes perpendiculares dividen al plano en cuatro cuadrantes.



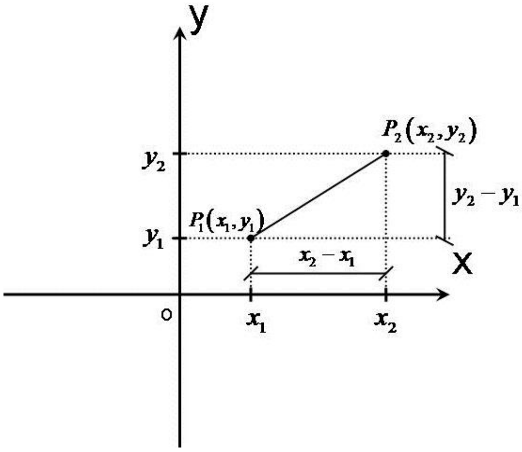
Conociendo las coordenadas de un punto este puede ubicarse en el plano.

Ejemplo: $P(-2,3)$.



Distancia entre dos puntos del plano

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



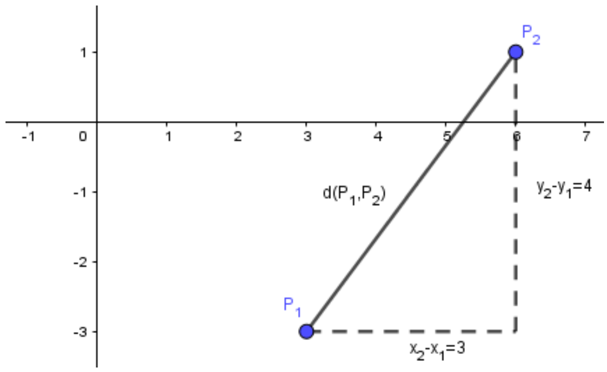
$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula de distancia entre 2 puntos

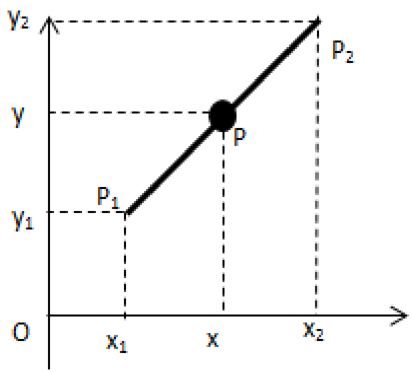
Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos $P_1(3;-3)$ y $P_2(6;1)$.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(6-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



<u>Punto medio de un segmento</u>

Para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{P_1P_2}$, se deben realizar el promedio entre las coordenadas de los extremos.



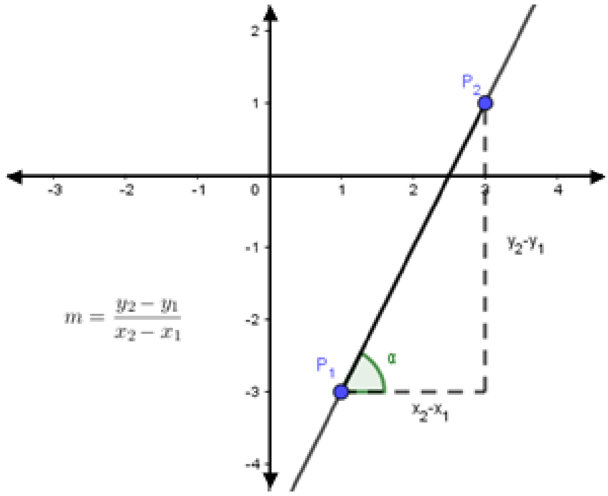
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

<u>Ecuación de la recta</u>

<u>Definición</u>: Un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano que satisfacen determinadas propiedades geométricas.

Definimos ***recta*** como el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que, tomando dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar geométrico, el valor de la *pendiente* **m** calculada por medio de la expresión: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1 \quad (I)$

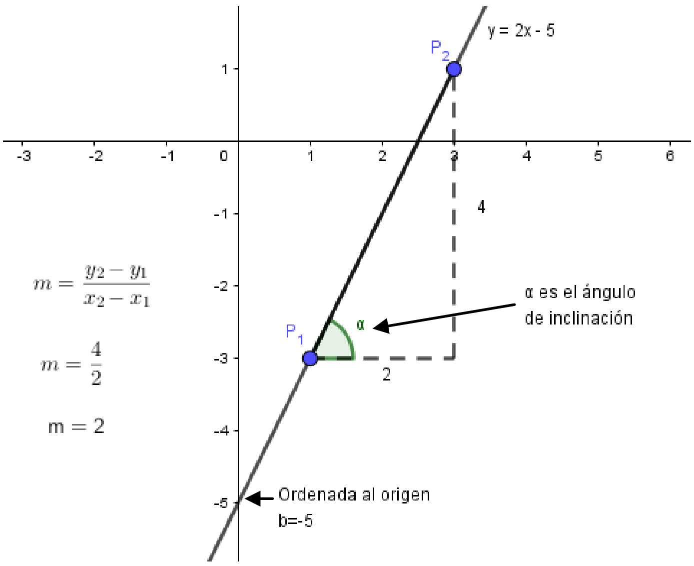
resulta **constante**.



Existen diferentes formas de escribir la ecuación de la recta.

- La ecuación *general o implícita* de la recta tiene la siguiente estructura: $\boldsymbol{A.x + B.y + C = 0}$
- La ecuación *explícita* es $\boldsymbol{y = m.x + b}$, donde m es la pendiente y b la ordenada al origen

Ejemplo: Representación gráfica de y=2x-5

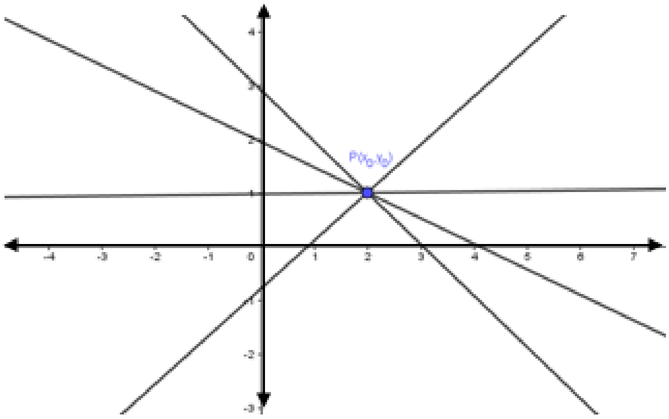


La pendiente (m) indica la variación de la variable dependiente (y), por cada unidad que varía la variable independiente (x), es decir, la cantidad de unidades que disminuye o aumenta "y" por cada unidad que se incrementa "x".

La Ordenada al origen (b) es un valor que indica donde la recta intersecta al eje de ordenadas. Dado que la intersección es un punto, este tendrá como coordenadas (0,b).

Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Por un punto del plano pasan infinitas rectas.



Consideramos el haz de rectas que pasa por el punto P (x_0,y_0).
La ecuación explícita de una recta del plano es:

$$y = m \cdot x + b \quad (1)$$

Si la recta pasa por P sus coordenadas verifican la ecuación anterior.

$$y_0 = m \cdot x_0 + b \quad (2)$$

Restando miembro a miembro (1) y (2) y sacando factor común m:

$$y - y_0 = m \cdot x + b - (m \cdot x_0 + b)$$
$$y - y_0 = m \cdot x + b - m \cdot x_0 - b)$$

$$\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

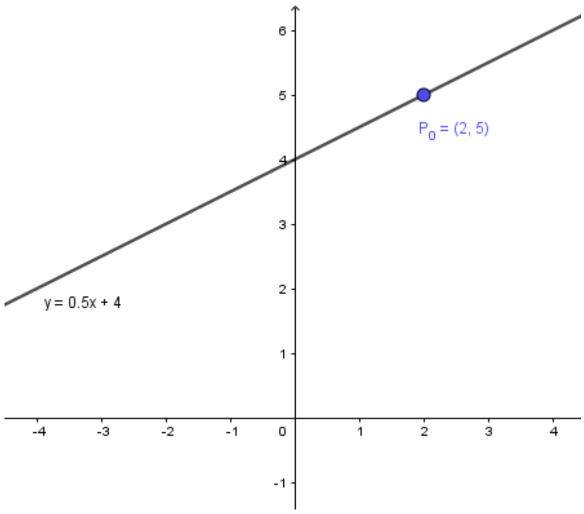
Conclusión: Podemos encontrar la ecuación de la recta teniendo como datos la pendiente y un punto perteneciente a ella.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta de pendiente ½ y pasa por el punto $P_0(2;5)$.

$$y - 5 = 1/2 \cdot (x - 2)$$

$$y - 5 = 1/2 \cdot x - 1$$

$$y = 1/2 \cdot x + 4$$



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Por dos puntos pasa una sola recta.

Consideremos los puntos P_0 (x_0,y_0) y P_1 (x_1,y_1), pertenecientes a la recta.

Dado que cada punto pertenece a la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta.

$$y_0 = m \,.\, x_0 + b \qquad\qquad y_1 = m \,.\, x_1 + b$$

Restamos miembro a miembro.

$$y_1 - y_0 = m \,.\, x_1 + b - (m \,.\, x_0 + b)$$

$$y_1 - y_0 = m \,.\, x_1 + b - m \,.\, x_0 - b$$

$$y_1 - y_0 = m \,.\, (x_1 - x_0)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m$$

Habiendo obtenido el valor de la pendiente de la recta y teniendo en cuenta que la recta pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$, usamos la ecuación anteriormente obtenida.

$$y - y_0 = m \,.\, (x - x_0)$$

Reemplazamos el valor de m.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \,.\, (x - x_0)$$

Acomodamos la ecuación

$$\boxed{\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0(1;5)$ y $P_1(2;4)$

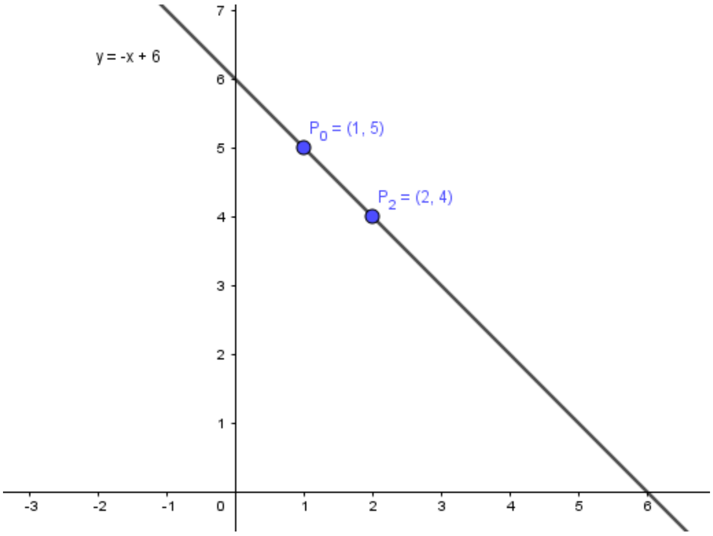
$$\frac{y - 5}{4 - 5} = \frac{x - 1}{2 - 1}$$

$$\frac{y - 5}{-1} = \frac{x - 1}{1}$$

$$y - 5 = (x - 1).(-1)$$

$$y = -x + 1 + 5$$

$$\boxed{y = -x + 6}$$



Posiciones relativas de la recta

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.
Sean

$$l_1 : y = m_1 x + b_1$$
$$l_2 : y = m_2 x + b_2$$

Entonces $l_1 // l_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

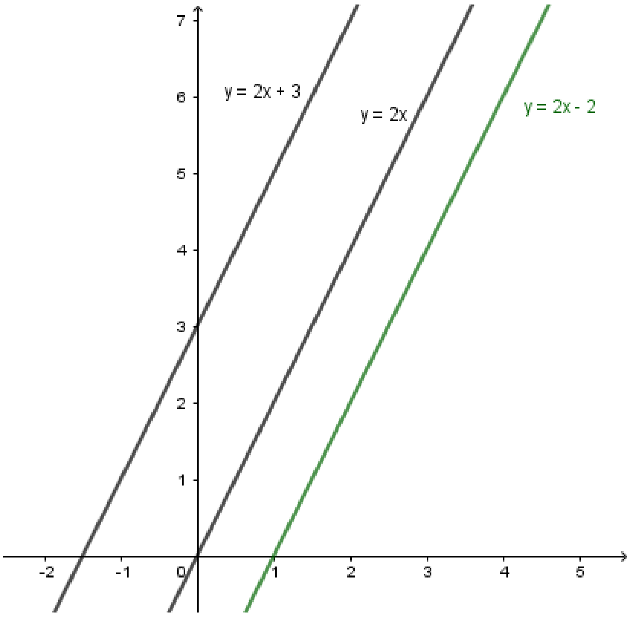
Ejemplo:

y = 2 . x + 3

y = 2 . x

y = 2 . x - 2

Son rectas paralelas. Tienen igual pendiente ***m = 2***



Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es -1.
Sean:

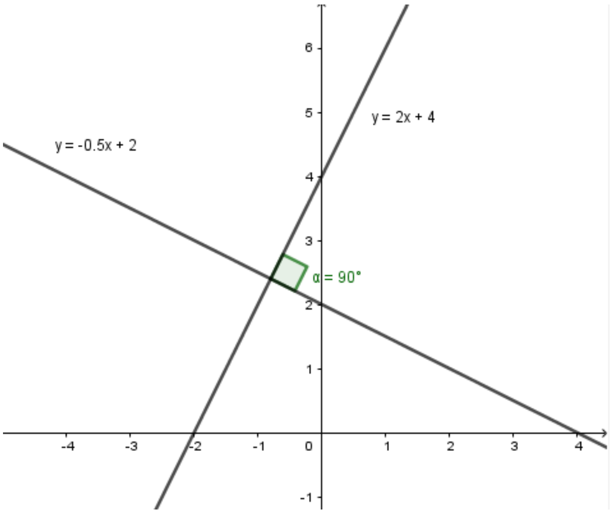
$$l_1 : y = m_1 x + b_1$$
$$l_2 : y = m_2 x + b_2$$

Entonces $l_1 \perp l_2$ si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo:

l_1: y = - ½ . x - 2
l_2: y = 2 . x + 4

$$m_1.m_2 = -\frac{1}{2}.2 = -1$$



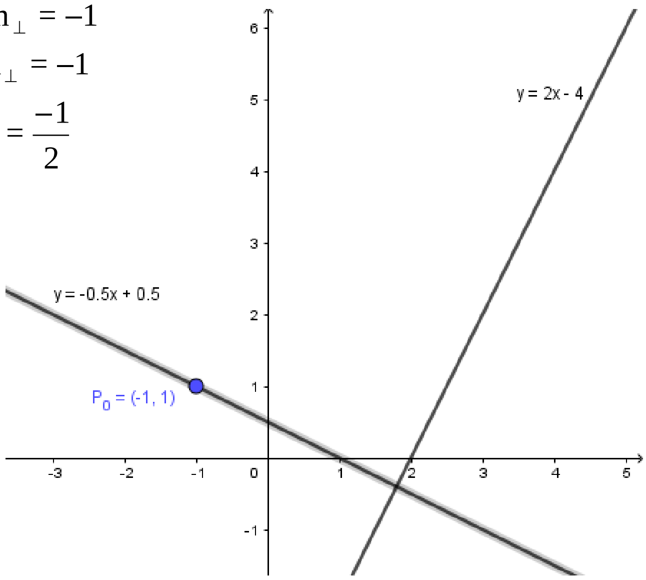
Ejercicio:
Hallar la ecuación de la recta perpendicular a -4x+2y+8=0 y pase por P_0(-1,1)

Se escribe la ecuación de la recta en forma explícita

-4x+2y+8=0
2y=4x-8
y=2x-4

$$m.m_\perp = -1$$
$$2.m_\perp = -1$$
$$m_\perp = \frac{-1}{2}$$

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x+1)$$
$$y-1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma: $ax + by = c$ donde a, b, c son valores numéricos (coeficientes) y las incógnitas son **x** e **y.** Gráficamente representa una recta en el plano.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

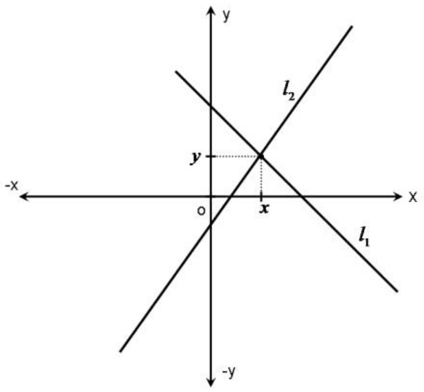
Resolver el sistema implica encontrar los valores de las variables que satisfacen ambas ecuaciones.

Gráficamente lo que tenemos son dos rectas en el mismo plano.

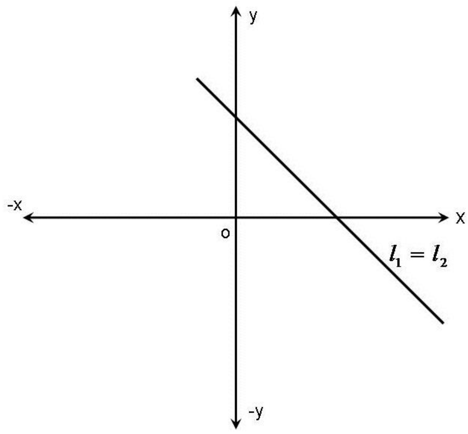
En este tipo de sistema de ecuaciones se pueden presentarse los siguientes casos:

- **Sistema compatible:** el sistema admite solución.

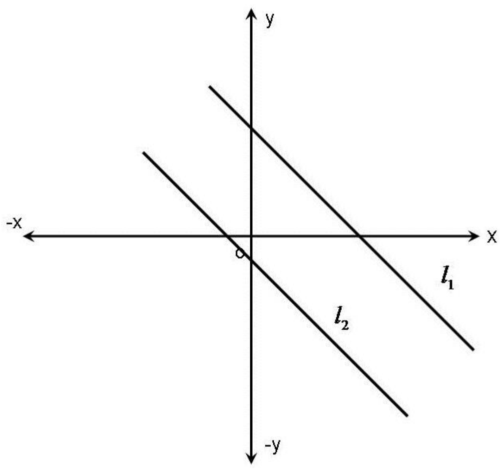
  ✓ **Sistema compatible determinado (S.C.D.):** El sistema tiene única solución.
  La representación gráfica consta de dos rectas que se cortan en un punto; los valores de **x** e **y** de este punto son la solución al sistema.



  ✓ **Sistema compatible indeterminado (S.C.I.):** el sistema admite infinitas soluciones.
  La representación gráfica son dos rectas coincidentes. Todos los puntos de las rectas son solución del sistema.



- **Sistema incompatible:** el sistema no admite solución. En este caso, su representación gráfica son dos rectas paralelas.



<u>**Métodos analíticos de resolución**</u>

Método de sustitución

1º Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.
2º Sustituir en la otra ecuación la incógnita despejada.
3º Resolver la ecuación resultante, que es de primer grado y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
4º Sustituir el valor obtenido en la ecuación despejada en el 1º paso y la resolvemos
5º Verificar los resultados obtenidos

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (I) \\ x + 3y = 11 & (II) \end{cases}$$

De la ecuación (I) $\quad y = 7 - 2x$

En la (II) $\quad x + 3(7 - 2x) = 11$

$$x + 21 - 6x = 11$$

$$-5x = 11 - 21$$

$$-5x = -10$$

$$x = -10 : (-5)$$

$$x = 2$$

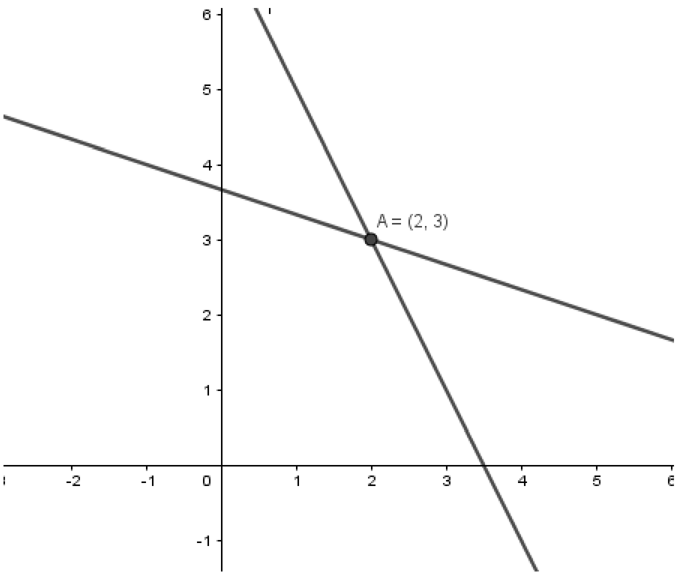
$$y = 7 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 3$$

Verificación $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ 2 + 3 \cdot 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 2 + 9 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 11 = 11 \end{cases}$

Solución: $x = 2;\ y = 3$

$$S = \{(2;3)\}$$

$$\therefore S.C.D.$$



Método de sumas y restas

Consiste en conseguir que al sumar o restar dos ecuaciones del sistema resulte una ecuación con una sola incógnita. Para ello será necesario multiplicar una ecuación y en algunos casos las dos ecuaciones por números convenientes para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las incógnitas sean números opuestos o iguales.

Ejemplo: $\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 3x-y=20 & (II) \end{cases}$

✓ Multiplicando por 2 la (II) $\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 6x-2y=40 & (II) \end{cases}$

✓ Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rr} & x+2y=9 \\ + & \underline{6x-2y=40} \\ & 7x=49 \\ & x=7 \end{array}$$

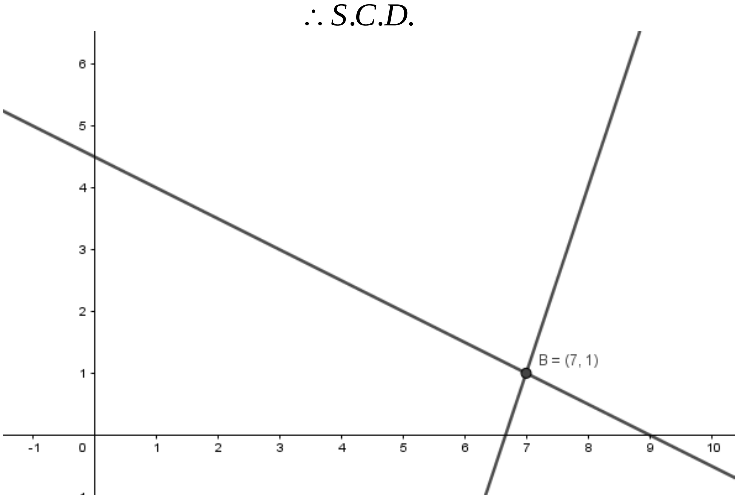
✓ Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo la **x** en cualquiera de las dos ecuaciones.

En la (I) quedaría:

$$7+2y=9$$
$$2y=9-7$$
$$y=\frac{2}{2}$$
$$y=1$$

Solución: $x=7;\ y=1$

$$S=\{(7;1)\}$$
$$\therefore S.C.D.$$



Método de igualdad

1º Despejar la misma variable de las dos ecuaciones
2º Igualar las dos expresiones

3º Resolver la ecuación resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.

4º Sustituimos el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones despejadas en el 1º paso.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} 3x - 2y = 8 & \Rightarrow \quad x = \dfrac{8+2y}{3} \\ x + y = 6 & \Rightarrow \quad x = 6 - y \end{cases}$$

$$2)\ \frac{8+2y}{3} = 6 - y$$

$$3)\ 8 + 2y = 18 - 3y$$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

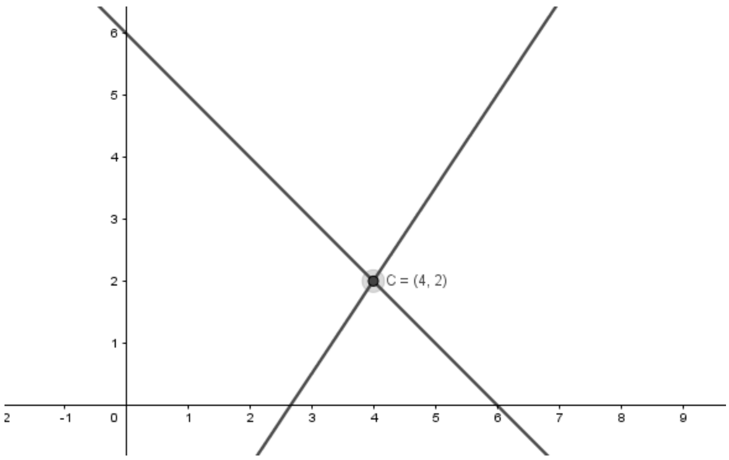
$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

$$S = \{(4;2)\}$$

$$\therefore S.C.D.$$



Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Método de Cramer

En un sistema de 3x3, el valor de las variables se obtiene a partir del cociente entre determinantes de la siguiente manera:

Sea

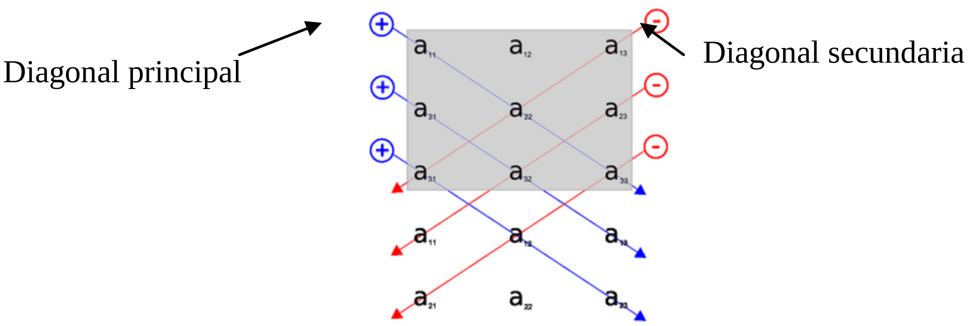
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Para calcular los determinantes aplicamos la ***Regla de Sarrus.***

Regla de Sarrus

A la suma del producto de los elementos de las diagonales que tienen la dirección de la principal, se le resta la suma del producto de los elementos que se encuentran sobre las diagonales que poseen la dirección de la secundaria.



$$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{33}.a_{12}.a_{21})$$

Ejemplo. Resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{2.2.2+1.1.1+3.(-1).(-1)-[1.2.3+(-1).1.2+2.(-1).1]= 10}$$

2 -1 1

1 2 -1

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = 2; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -1; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10} = -3$$

$$S = \{(2;-1;-3)\}$$

$$\therefore S.C.D.$$

Trigonometría

La trigonometría es una de las ramas de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". Se deriva del vocablo griego trigōno: "triángulo" y metron: "medida".

La trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos.

Por lo tanto, el objetivo de ésta es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triangulo con las medidas de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular unos mediante los otros.

MEDIR un ángulo, es asignarle un número de manera tal que, ese número, permita reproducirlo en cualquier parte, sin necesidad de transportarlo materialmente de un lugar a otro.

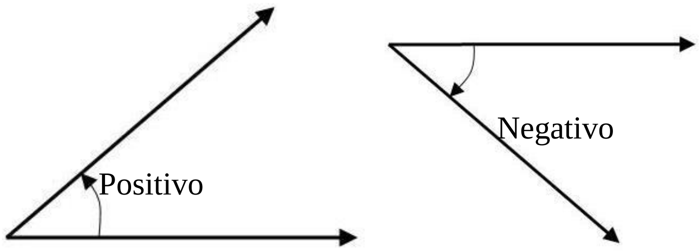
Sistema de medición de ángulos

Recordamos algunos conceptos relacionados con los signos de los ángulos y las unidades en que se miden los mismos.

Signos de los ángulos:

Tomaremos como ángulo positivo aquel que se obtiene de hacer rotar una semirrecta en sentido antihorario.

Y como ángulo negativo aquel que se obtiene de hacer girar una semirrecta en sentido horario.

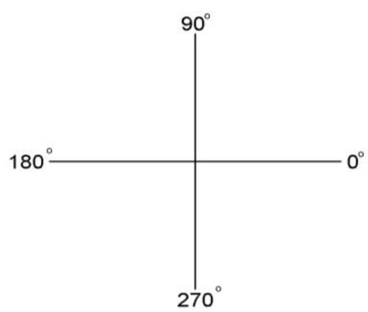


Sistema de medición de ángulos

Analizaremos dos sistemas diferentes que se usan para expresar la medida de un ángulo.

Estos sistemas son el "**Sistema Sexagesimal**" y el "**Sistema Circular**"

1. Sistema sexagesimal



Si dividimos una circunferencia de radio cualquiera en 360 arcos iguales y unimos los puntos de división con el centro, obtendremos 360 ángulos iguales a cada uno de los cuales se asigna el valor de un grado sexagesimal (1°).

Este sistema utiliza como unidad de medida de los ángulos, el "grado sexagesimal"(°).

La revolución completa corresponde a 360°.

El grado sexagesimal posee submúltiplos (minutos y segundos), los cuales verifican las siguientes equivalencias:

1º corresponde a 60′
1′ corresponde a 60′′

2. Sistema circular.

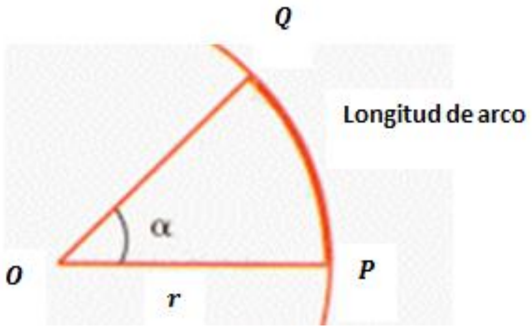
Este sistema utiliza como unidad de medida el "radian.

Un ángulo mide un radian (1 rad) cuando describe un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.

Para saber cuántos radianes mide un ángulo determinado, debemos saber cuántas veces cabe el radio de la circunferencia en el arco de la misma recorrido por dicho ángulo.

La medida de un ángulo queda definida en este sistema, como el cociente entre la longitud del arco PQ y la longitud del radio (r).

Si designamos con α al ángulo de vértice coincidente con el centro de la circunferencia:

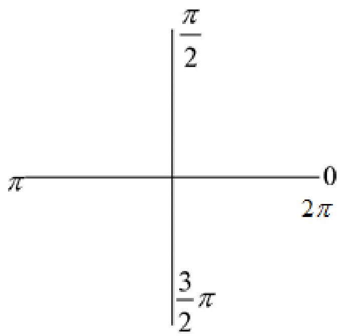


$$\alpha = \frac{longitud\ de\ arco\ PQ}{r}$$

El ángulo de un giro mide 2π radianes. El ángulo de medio giro mide π radianes. El ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes. La mitad de un ángulo recto mide $\frac{\pi}{4}$ radianes.

En el ángulo llano (180º), si queremos saber cuantas veces entra el radio en media circunferencia veremos que lo hace π veces.

De esta manera podemos completar la revolución:



La revolución completa corresponde a 2π Rad. De esta manera podemos establecer equivalencias entre el sistema sexagesimal y el circular. Por ejemplo:

1 π radian equivalen a 180º

En el sistema de medida en radianes, el ángulo de un radián (longitud del arco igual a la medida del radio) equivale a un ángulo del sistema sexagesimal de 57° 17′44″,80; en efecto:

$$\pi\ rad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 180^0$$
$$1\ rad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ x = \frac{180^0}{\pi} = 57°\ 17'44'',8$$

Ejemplo 1:

Si $\alpha^\circ = 30^\circ$, expresarlo en radianes

180º _______________ $\pi\ rad$

30º _______________ $x = \dfrac{\pi}{6}\ rad$

$$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} \bullet 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 2:

Si $\alpha^r = \dfrac{\pi}{3}$, expresarlo en el sistema sexagesimal

$\pi\ rad$ _____________ 180^0

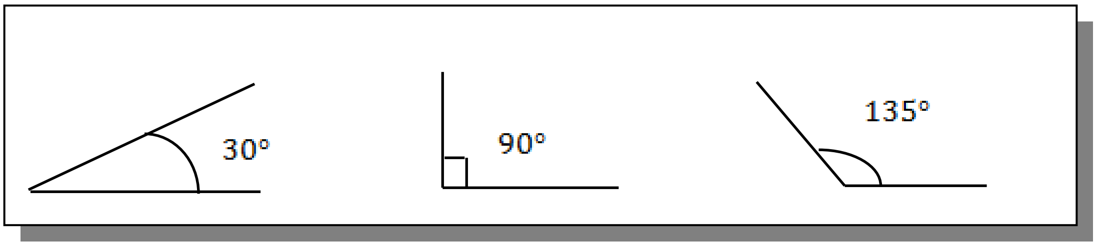
$\dfrac{\pi}{3} rad$ _____________ $x = 60^\circ$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} . \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Ángulos de la figura

Existen tres tipos de ángulos:

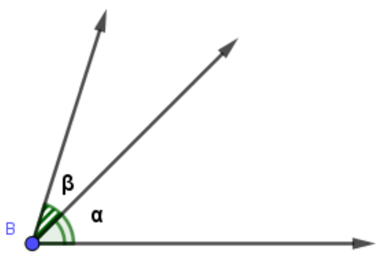
- agudo (menor de 90º)
- recto (igual a 90º)
- obtuso (mayor de 90º)



Nota: los ángulos mayores de 180° y menores de 360° se llaman cóncavos.

ÁNGULOS CONSECUTIVOS.

Son aquellos ángulos que tienen el vértice en común y, como lado común, el final de un ángulo y el comienzo del otro:



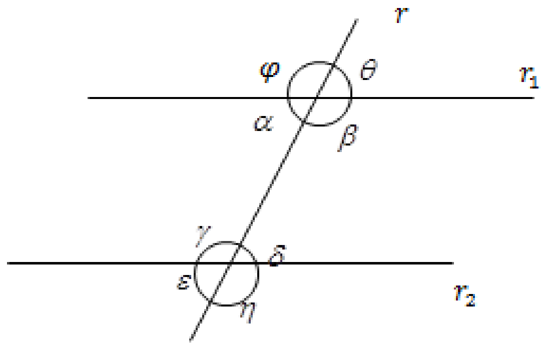
Aquellos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo recto, se denominan ángulos complementarios.

Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos forman un ángulo llano, dichos ángulos son suplementarios.

Los lados no comunes de dos ángulos consecutivos cualesquiera determinan un ángulo llamado ángulo suma.

Rectas paralelas cortadas por una transversal.

La transversal r corta a r_1 y r_2 en dos puntos, formando los ángulos interiores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y los ángulos externos $\eta, \varepsilon, \theta, \varphi$.



Los pares de ángulos α, δ y β, γ se denominan alternos internos. Los ángulos alternos internos son congruentes.

Los pares de ángulos ε, θ y φ, η son alternos externos. Los ángulos alternos externos son congruentes.

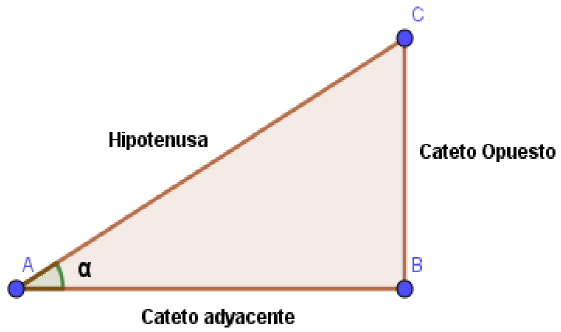
Los pares de ángulos $\alpha, \varepsilon;\ \beta, \eta;\ \varphi, \gamma$ y θ, δ son correspondientes. Los ángulos correspondientes son iguales.

Los pares de ángulos α y γ; β y δ son conjugados internos. Estos ángulos son suplementarios.

Los pares de ángulos ε y φ; θ y η son conjugados externos. Estos ángulos son suplementarios.

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.



$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

La cosecante (cosec) de un ángulo es la razón recíproca del seno.

$$\cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto}$$

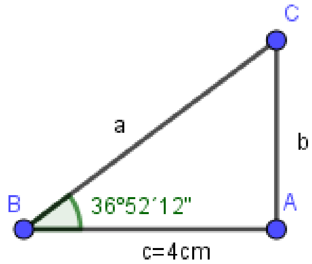
La secante (sec) de un ángulo es la razón recíproca del coseno.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipotenusa}{cat.adyacente}$$

La cotangente (cotg) de un ángulo es la razón recíproca de la tangente

$$\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$$

Ejemplo 1:
Resolver el triángulo rectángulo de la figura conocido un cateto y un ángulo agudo.



a) Cálculo de $\hat{C}$:

Los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son complementarios.

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90° \qquad \widehat{C} = 90° - \widehat{B}$$

$$\hat{C} = 90° - 36°52´12"$$

$$\hat{C} = 53°7´48"$$

b) Cálculo de la hipotenusa (a):

$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{\cos\widehat{B}}$$

$$a = \frac{4cm}{\cos 36°52´12"} \Rightarrow a = 5\ cm$$

b) Cálculo de b:

$$tg\ \widehat{B} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \bullet tg\ \widehat{B}$$

$$b = 4\ cm.0{,}75$$

$$b = 3\ cm$$

Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

Relaciones entre las razones trigonométricas

Dado los ejes de coordenados **xy** y el origen de coordenadas **O**, al trazar una circunferencia genérica con centro en **O**, el punto de corte de la circunferencia con el semieje positivo de las **x**, lo señalamos **E**.

La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo **α** con el eje **x**, corta a la circunferencia en el punto B. La vertical que pasa por **E** corta la recta **r** en el punto **D**.

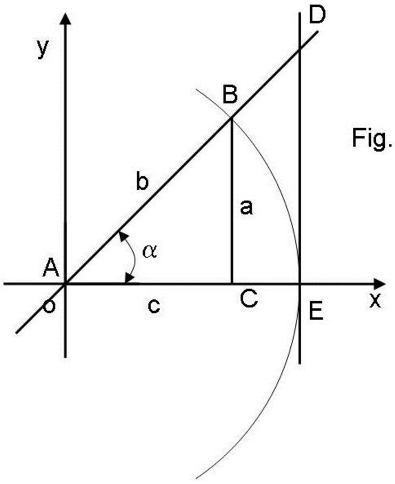


Fig. a

Por semejanza triángulos: $\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OE}} \quad (1)$

Los puntos **E** y **B** están en la circunferencia de centro **O**, por eso las distancias $\overline{OB}\ y\ \overline{OE}$ son el radio de circunferencia. Si consideramos a la circunferencia de radio 1, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} sen(\alpha) &= \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{1} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{1} \\ tg(\alpha) &= \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{DE}}{1} \end{aligned}\right\} (2)$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos: $\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha)$

Considerando el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ (según Fig. a), por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 \quad (3)$$

Reemplazando (2) en (3), y sabiendo que $\overline{OB} = radio = 1$ tenemos:

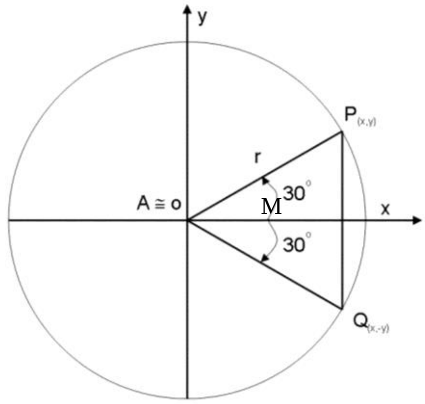
$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Lo que llamaremos **relación pitagórica de la trigonometría.**

Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º

Pueden obtenerse fácilmente realizando algunas consideraciones geométricas:

a) $\alpha = 30^0$



Dibujamos los triángulos **POM** y **MOQ**, resultando:

$\hat{P} = \hat{O} = \hat{Q} = 60^0$, lo que implica que el triangulo **POQ** es equilátero, con:

$$\overline{PQ} = r \qquad \overline{PM} = \overline{MQ} = r/2$$

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2$$

$$r^2 = \overline{OM}^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$sen30º = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Rightarrow sen30º = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30º = \frac{\frac{\sqrt{3}r}{2}}{r} \Rightarrow \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

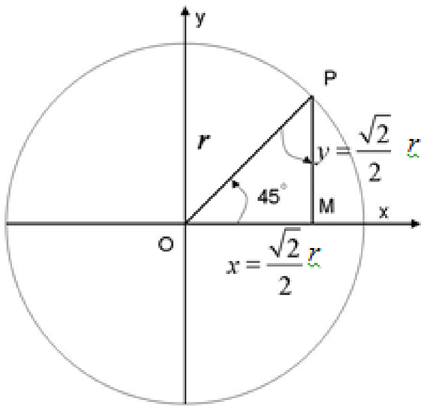
$$tg30º = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \Rightarrow tg30º = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\left(30^0\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$sec\left(30^0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$cosec\left(30^0\right) = 2$$

b) $\alpha = 45^0$



El triangulo **POM** es isósceles $(x = y)$ por el teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + y^2$

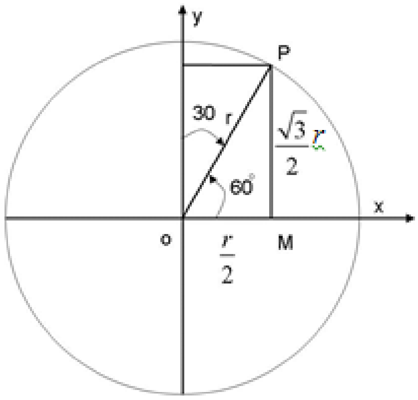
Y siendo $x = y$, reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$r^2 = x^2 + x^2$$
$$r^2 = 2x^2$$
$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} r \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

Resultando:

$$sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cosec(45^0) = \sqrt{2}$$
$$cos(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sec(45^0) = \sqrt{2}$$
$$tg(45^0) = 1 \qquad cotg(45^0) = 1$$

c) $\alpha = 60^0$



Para obtener los lados **OM** y **PM**; comparar con la figura que corresponde a $\alpha = 30^0$.

$$sen\left(60^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cosec\left(60^0\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$cos\left(60^0\right)=\frac{1}{2} \qquad sec\left(60^0\right)=2$$

$$tg\left(60^0\right)=\sqrt{3} \qquad cotg\left(60^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las deducciones precedentes pueden resumirse en el siguiente cuadro:

Rad.	Grados sexag.	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg
0	0^0	0	1	0	$\nexists$	1	$\nexists$
$\frac{1}{6}\pi$	30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90^0	1	0	$\nexists$	1	$\nexists$	0

Observación: $sen\alpha=\cos(90-\alpha)$

Identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad que se cumple para todos los valores permisibles de la variable.

A continuación, daremos una nómina de identidades (sin demostrar) que entendemos resultando de conocimiento ineludible para un estudiante de ingeniería.

$$sen\left(\alpha+\beta\right)=sen\left(\alpha\right)\cdot cos\left(\beta\right)+cos\left(\alpha\right)\cdot sen\left(\beta\right)$$

$$sen\left(\alpha-\beta\right)=sen\left(\alpha\right)\cdot cos\left(\beta\right)-cos\left(\alpha\right)\cdot sen\left(\beta\right)$$

$$cos\left(\alpha+\beta\right)=cos\left(\alpha\right)\cdot cos\left(\beta\right)-sen\left(\alpha\right)\cdot sen\left(\beta\right)$$

$$cos\left(\alpha-\beta\right)=cos\left(\alpha\right)\cdot cos\left(\beta\right)+sen\left(\alpha\right)\cdot sen\left(\beta\right)$$

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\left(\alpha\right)+tg\left(\beta\right)}{1-tg\left(\alpha\right)tg\left(\beta\right)}$$

$$tg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{tg\left(\alpha\right)-tg\left(\beta\right)}{1+tg\left(\alpha\right)tg\left(\beta\right)}$$

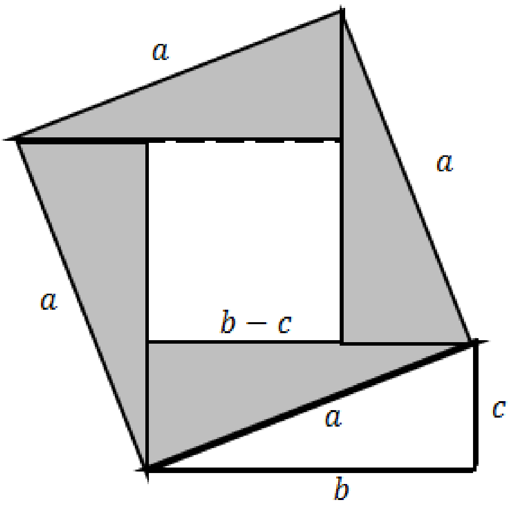
Resolución de un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

Relación entre los lados. Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si ABC es un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

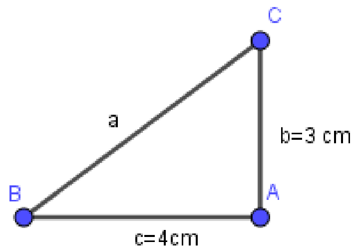


$$a^2 = 4.\frac{1}{2}bc + (b-c)^2$$

$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

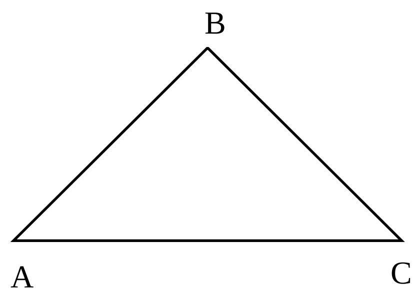
Ejemplo: Resolver el triángulo rectángulo de la figura, conociendo dos de sus catetos.



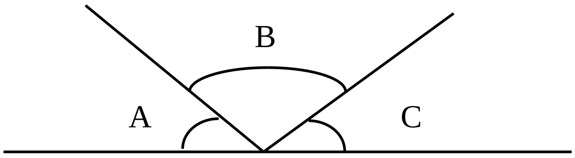
Cálculo de la hipotenusa (a) aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = (3\ cm)^2 + (4\ cm)^2$$
$$a^2 = 9\ cm^2 + 16 cm^2$$
$$a^2 = 25\ cm^2$$
$$a = 5\ cm$$

Relación entre los ángulos. Suma de los ángulos interiores de un triángulo.



Si se cortan los ángulos y se disponen como en la figura siguiente, se observa que:



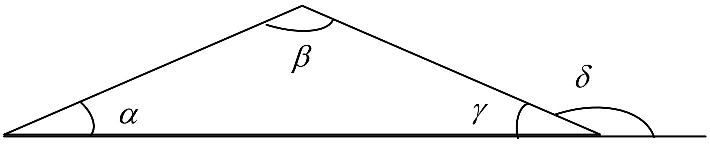
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{o}$$

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°

Observaciones:

- En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
- Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

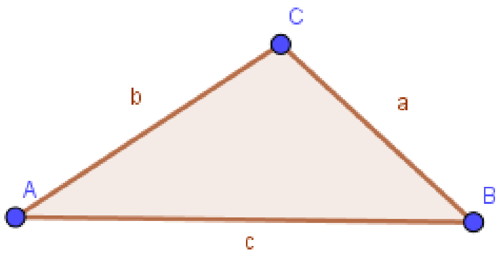
Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, puede demostrarse fácilmente que la amplitud de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.



$$\delta=\alpha+\beta$$

Teorema del seno

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos

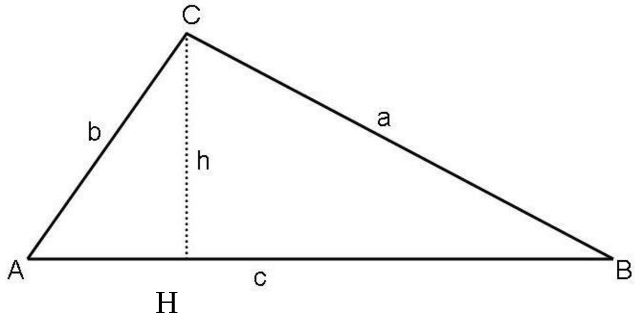


$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$

Demostración:

Para demostrarlo aplicamos la estrategia de la altura. Trazamos la altura **h** desde el vértice **C**. Los triángulos **AHC** y **BHC** son rectángulos. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} sen(A)=\frac{h}{b}\rightarrow h=b\cdot sen(A) \\ sen(B)=\frac{h}{a}\rightarrow h=a\cdot sen(B) \end{array}\right\} b\cdot sen(A)=a\cdot sen(B)\rightarrow\frac{a}{sen(A)}=\frac{b}{sen(B)}$$



Esta es la primera de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice **B**, relacionaríamos los lados **a** y **c** con sus ángulos opuestos, obteniendo:

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

Se completa, así, la cadena de igualdades que queríamos demostrar.

<u>Teorema del coseno</u>

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

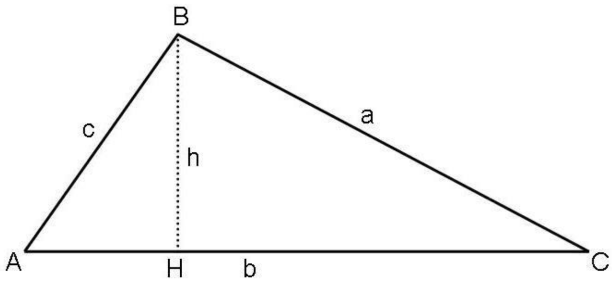
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot cos(B)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot ba \cdot cos(C)$$

Demostración:

Trazamos la altura **h**, sobre el lado **b**:



$$cos(A) = \frac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \overline{AH} = c \cdot cos(A)$$

$$\overline{CH} = b - AH = b - c.\cos(A)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos **AHB** y **BHC** y teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, resulta:

$$a^2 = h^2 + \overline{HC}^2 = h^2 + \left(b - c \cdot cos(A)\right)^2 =$$

$$= h^2 + b^2 + c^2 \cdot cos^2(A) - 2bc \cdot cos(A)$$

$$c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 = h^2 + \left(c \cdot cos(A)\right)^2 = h^2 + c^2 \cdot cos^2(A)$$

Restando:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cdot cos(A)$$

Despejando:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(A)$$

De forma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.

Funciones

¿Para qué sirven las funciones?

a) *En la Física*

Sabemos que al suspender un peso de un resorte, éste se alarga, ¿podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en función del peso.

b) *En Química*

En el laboratorio de Química, ¿podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en función del tiempo.

c) *En Economía*

Un investigador suele expresar: el consumo en función del ingreso, también la oferta en función del precio, o el costo total de una empresa en función de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables.

La palabra ***función*** se usa frecuentemente para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto de otra.

Por ejemplo:

- El área de un cuadrado depende de la longitud de su lado.
- El consumo de energía eléctrica depende de la época del año.

Una relación que a cada elemento de A le asigna uno y sólo un elemento de B, lo llamaremos función.

Definición *Una función* $f : A \longrightarrow B$ *es una relación que asigna a cada elemento* $x \in A$ *uno y sólo un elemento* $y \in B$. *Se denota* $y = f(x)$

Una relación es función si cumple con las condiciones de existencia y unicidad.

Existencia: Para todo elemento del conjunto de partida, existe por lo menos un elemento del conjunto de llegada con el cual se relaciona.

A: Conjunto de partida (Dominio)

B: Conjunto de llegada (Codominio)

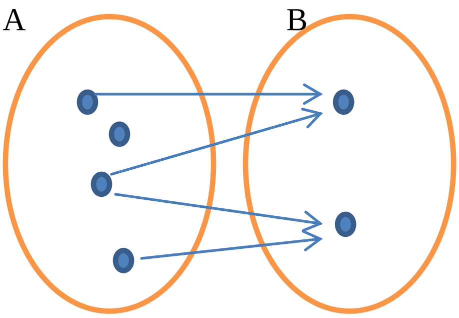
$f : A \longrightarrow B$

$\forall a \in A\ ,\ \exists b \in B \,/\, b = f(a)$

Unicidad: Cada elemento del conjunto de partida se encuentra relacionado con un **único** elemento del conjunto de llegada.

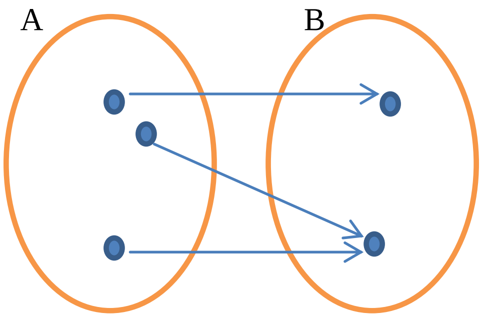
$$b = f(a) \wedge c = f(a) \Rightarrow b = c$$

Ejemplo: Determinar si las siguientes relaciones son funciones.



No es función

No cumple ni existencia ni unicidad



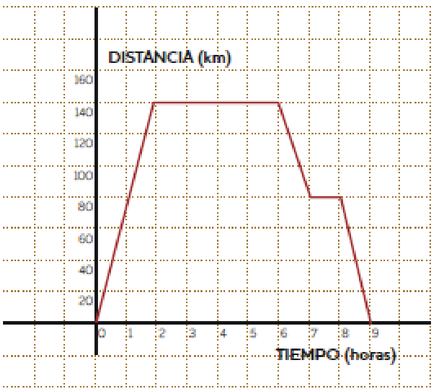
Es función

Las funciones se utilizan como herramienta para modelizar una situación problemática. No se trata de una tabla de valores, no es una expresión simbólica, no es un gráfico. Es todo lo anterior de manera integrada.

Interpretación gráfica

Resolvamos estos problemas iniciales:

1) La siguiente gráfica representa una excursión en cierto transporte de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al colegio (en kilómetros).



a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?
b) ¿Cuánto tiempo duró la visita?
c) ¿Se detuvieron en algún momento a la ida?, ¿y a la vuelta?
d) ¿Cuánto duró la excursión completa, ida y vuelta?

Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos tales que a todos los elementos de un conjunto inicial que llamaremos Dominio, le asigna uno y solo uno de los elementos del conjunto final, que llamamos Codominio.

Una relación entre dos variables es función si a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. **El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente x**. Se lo simboliza Dom f.

La imagen de una función f es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y. La imagen es un subconjunto del codominio. Se lo simboliza Im f.

EJEMPLO

Si la expresión analítica de una función polinómica es $f(x)= -x^4+4$. el dominio son todos los números reales.
Dom f = $\Re$.

=> Si la expresión analítica de una función es un cociente, el dominio son todos los números reales, excepto los que anulan el denominador.

Si la función es $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, entonces el Dom f = $\Re - \{1\}$

Introducción al análisis de funciones

Las características de las funciones se utilizan como herramientas para resolver problemas. Por ejemplo, analizar el crecimiento o decrecimiento de una gráfica, reconocer los extremos e interpretar estos conceptos en el contexto de un problema es una manera eficiente de analizar modelos matemáticos. Revisaremos algunos de estos conceptos para poder aplicarlos a la resolución de problemas.

- *Intervalo de crecimiento*: Un intervalo es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, aumenta también el valor de la variable dependiente.
- *Intervalo de decrecimiento*: Un intervalo es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente.
- *Intervalo constante*: Un intervalo es constante cuando al aumentar el valor de la variable independiente, no se producen variaciones en la variable dependiente.
- *Máximo*: Es un punto de la función en el cual ésta pasa de ser creciente a decreciente.
- *Mínimo*: Es un punto de la función en el cual ésta pasa de ser decreciente a creciente.
- *Raíces o ceros*: Son los valores del dominio que tienen por imagen a cero. Gráficamente es la intersección de la función con el eje de abscisas.

Función lineal

Es una función polinómica de primer grado cuya representación en el plano cartesiano es una recta.

Su forma es:

$y = m.x + b \ \vee \ f(x) = m.x + b$

"m" y "b" son números reales.

Para obtener la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas, el eje "y", la variable independiente "x" vale cero.

$$f(x) = m.x + b$$
$$f(0) = m.0 + b$$
$$f(0) = b$$

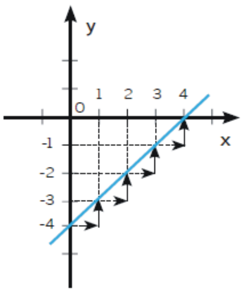
Por lo tanto, el valor "b" indica la ordenada al origen, es decir, la intersección de la recta con el eje de ordenadas.

Con el dato de la ordenada al origen, entonces, tenemos un punto de la recta. Para graficarla necesitamos otro más. Para encontrarlo, utilizamos el otro dato de la función lineal, el número real "m", que representa la pendiente de la recta, la cual está relacionada con el ángulo de inclinación que tiene la recta respecto a la horizontal.

EJEMPLO

$f(x) =$ y = x - 4

Cuando la abscisa (unidad horizontal) aumenta una unidad, la ordenada (ordenada vertical) también aumenta una unidad.



$Dom f = R$

$\mathrm{Im}\ f = R$

$Int.crec.: (-\infty; \infty)$

$Raíz: x = 4$

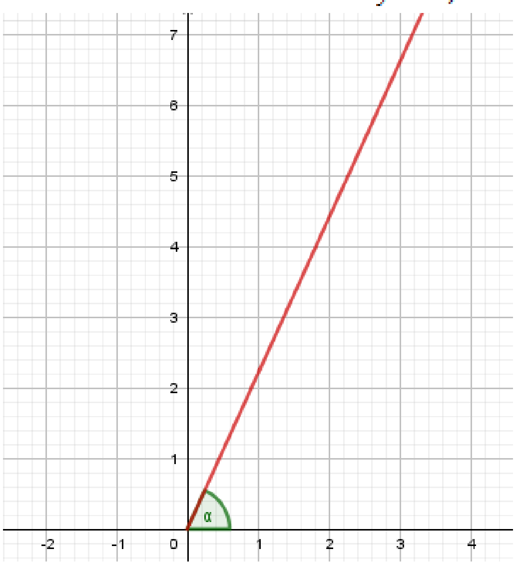
Ejemplo

Escriba la función lineal que expresa la relación entre kg y libras. Recordar que $1Kg \cong 2{,}2\ libras$.

x: cantidad de Kg

y: cantidad de libras.

$y = 2{,}2.x$



$$\boxed{tg\ \alpha = m}$$

Función cuadrática

La curva que representa una función cuadrática es la parábola que modelizan situaciones como:

- El lanzamiento de un proyectil.
- Las antenas parabólicas satelitales y de telefonía.
- Los techos de galpones son parabólicos.
- Los puentes colgantes.

La forma polinómica de una función cuadrática es:

$$f(x) = ax^2 + b.x + c$$

$$a \neq 0$$

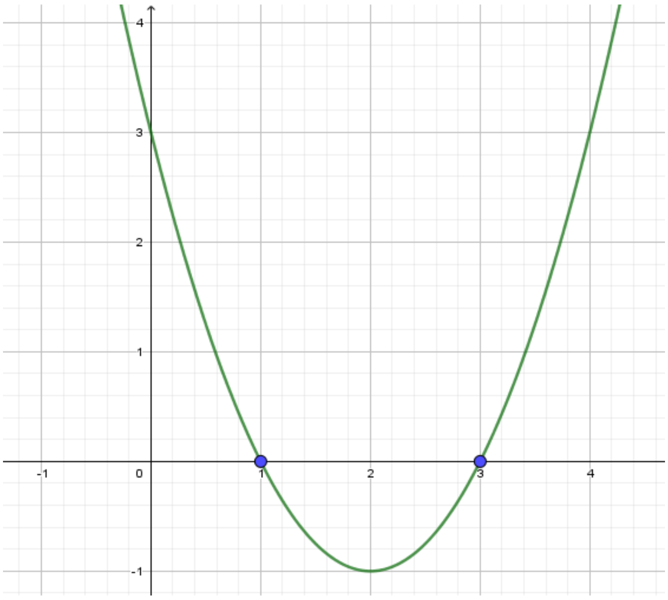
Para hallar las raíces se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para determinar las coordenadas del *vértice* se utilizan las siguientes estructuras:

$V_x = -\frac{b}{2a}$ $\qquad\qquad$ $V_y = f(V_x)$

Ejemplo: $f(x) = -4x + x^2 + 3$



$Raíces: x_1 = 1 \; y \; x_2 = 3$
$Vértice: V_x = 2$
$V_y = -1$

$V(2; -1)$

$Dom\ f = R$
$Im\ f = [-1; \infty)$

$Intervalo\ de\ decrecimiento: (-\infty; 2)$
$Intervalo\ de\ crecimiento: (2; \infty)$
$V\ es\ un\ mínimo$

Las funciones que se utilizaron en la modelización de los problemas anteriores están formado por uno o más términos; cada uno de los cuales se los llama MONOMIOS.

Cuando la función está formada por varios términos, a la expresión se la suele llamar POLINOMIO. El grado de la función polinómica es el mayor exponente que afecta a la variable.

Funciones racionales

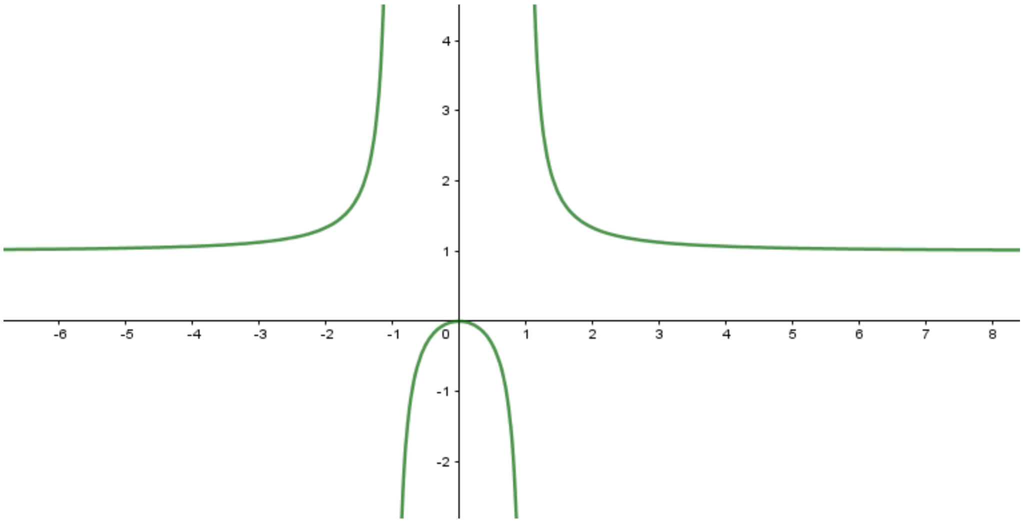
Una función racional es una función que puede escribirse como cociente de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Si el denominador es un número (un polinomio de grado 0), entonces la función es un polinomio. Por lo tanto, vamos a considerar solamente funciones racionales cuyo denominador es un polinomio de grado mayor que 0.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$



Función exponencial

La función exponencial aparece con frecuencia en modelos matemáticos de diferentes procesos evolutivos.

La FUNCIÓN EXPONENCIAL está definida como una función $f:\Re \to \Re$ que verifica que $f(x) = y = a^x$, donde $a>0$ y $a \neq 1$, es un número real.

Por ejemplo, las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente solo hay una ameba.

La función que representa la situación anterior es $f(x) = 2^x$

Gráfica de funciones exponenciales

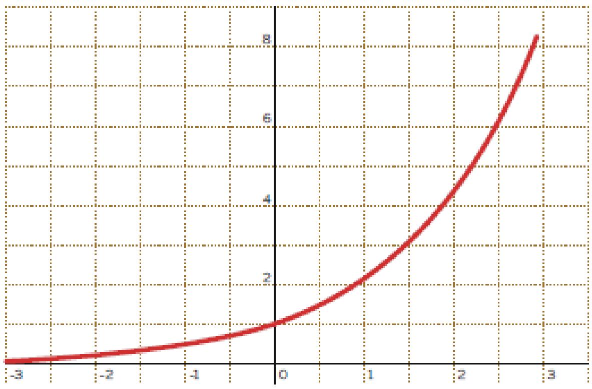
Para iniciar el estudio del gráfico de funciones exponenciales, se tiene en cuenta que hay dos posibilidades según la base de la función tome valores mayores o menores que la unidad.

Por ejemplo, el gráfico de la función $f(x) = 2^x$ es el siguiente:

$Dom\ f = R$

$Im\ f = (0;\infty)$

$Int. Crec.: (-\infty;\infty)$

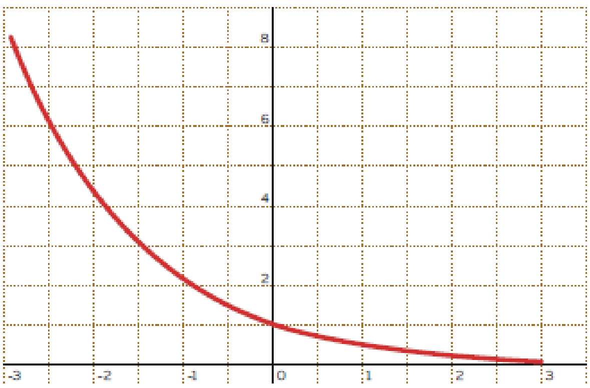


En cambio, el gráfico de la función: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es

$Dom\ f = R$

$Im\ f = (0;\infty)$

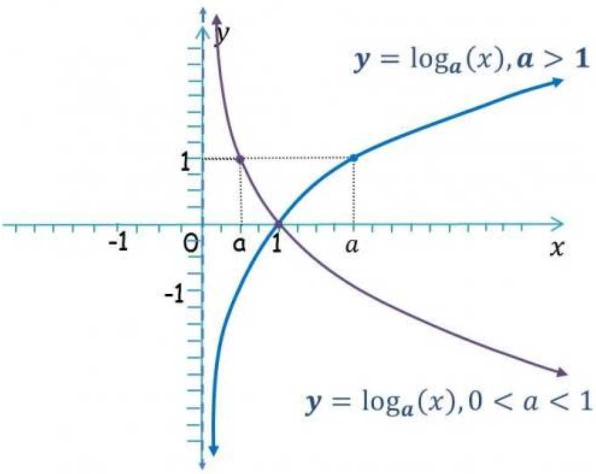
$Int. Decrec.: (-\infty;\infty)$



Función logarítmica

La función $f : \Re^{+} \to \Re$ definida por
$f(x) = \log_a x$ tal que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^{y} = x$, con a>0
y $a \neq 1$, un número real, se llama
FUNCIÓN LOGARÍTMICA de base a.

Representación gráfica de la función logarítmica



$Dom\ f = (0;\infty)$
$Im\ f = R$
$Raíz: x = 1$

$Si\ 0 < a < 1$
$f\ es\ decreciente\ en\ todo\ su\ dominio$

$Si\ a > 1$
$f\ es\ creciente\ en\ todo\ su\ dominio$